

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 82

1. *Gitterstruktur und elektrisches Leitvermögen
der Mischkristallreihen Au-Cu, Pd-Cu und Pt-Cu;
von C. H. Johansson und J. O. Linde*

(Hierzu Tafel VII)

Einleitung

Die vorliegende Untersuchung ist eine stetige Fortsetzung unserer früher in diesen Annalen erschienenen Arbeit über die Au-Cu und Pd-Cu Mischkristallreihen.¹⁾ Aus den Resultaten jener Untersuchungen ging hervor, daß in der Mischkristallreihe Au-Cu die Atome bei und in der Umgebung von 25 At.-Proz. bzw. 50 At.-Proz. Au eine regelmäßige Ordnung einnehmen, vorausgesetzt, daß die Legierungen bei etwa 370° C hinreichend getempert worden sind. Im Gegenfall ist die Atomverteilung statistisch ungeordnet. Die regelmäßige Ordnung gab sich in extra Intensitätsmaxima der Röntgenogramme (Überstrukturlinien) und in erniedrigten elektrischen Widerstandswerten der Legierungen zu erkennen. Die für ungebrochene Mischkristallreihen charakteristische bogenförmige Kurve in dem Widerstand-Konzentrationsdiagramm entspricht also der statistischen Verteilung, während bei Ordnung spitzenförmige Abweichungen mit der Spitze bei 25 bzw. 50 At.-Proz. Au entstehen. Dabei zeigten alle Legierungen im Spitzengebiete Überstrukturlinien, und umgekehrt hatten alle Legierungen, die Überstrukturlinien zeigen, auch erniedrigte Widerstände. In der Reihe Cu-Pd ergab sich ein analoger Zusammenhang zwischen Atomordnung und Leitvermögen. Bei den Proportionen 1 Cu:1 Au und 1 Cu:1 Pd war das Ordnen der Komponenten mit dem Übergang in ein tetragonales bzw. kubisch körperzentriertes Gitter verbunden, während 3 Cu:1 Au auch nach dem Ordnen kubisch-flächenzentriert verblieb. Betreffend übrige Resultate und Diskussionen verweisen wir auf

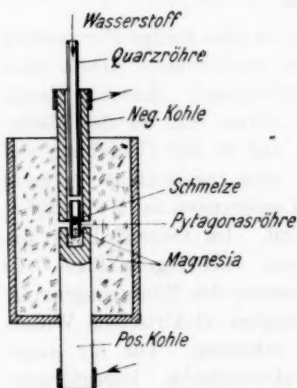
1) C. H. Johansson und J. O. Linde, Ann. d. Phys. 78. S. 439. 1925.

die genannte Mitteilung und gehen hier über, von den neu-gewonnenen Resultaten zu berichten.

Material und Herstellung der Präparate

Als Ausgangsmaterial sind dieselben Qualitäten von Cu, Au und Pd wie vorher verwendet. Das Platin ist reines Platin von Heraeus von der Art, die zu Thermoelementen benutzt wird.

Zur Herstellung der Legierungen mit Schmelzpunkt unter etwa 1500° C diente ein Vakuumofen mit Silbistäben, der bei



Elektrischer Lichtbogenofen mit Wasserstoffatmosphäre

Fig. 1

späterer Gelegenheit beschrieben werden soll, und zur Herstellung der Pt-reichsten Legierungen ein Lichtbogenofen mit Wasserstoffatmosphäre, dessen Anordnung aus der Fig. 1 hervorgeht.

Eine große Schwierigkeit bei der Untersuchung des elektrischen Leitvermögens von Legierungen kommt davon, daß sie sich innerhalb großer Konzentrationsintervalle nicht zu Draht verarbeiten lassen. Bei unserer Arbeit, wo das elektrische Leitvermögen vor allem in den Gebieten mit geordneter

Atomverteilung bestimmt werden sollte, kam diese Schwierigkeit besonders zur Geltung. Solche Legierungen sind nämlich sehr hart und spröde und lassen sich gar nicht auswalzen. Diese Schwierigkeit konnte aber hier beseitigt werden, weil die zu untersuchenden Phasen mit geordneter Verteilung nicht direkt bei der Kristallisation aus der Schmelze entstehen, sondern sich erst durch Umwandlung bei tieferen Temperaturen ausbilden. Solche Umwandlungen durch Diffusion im festen Zustand erfordern, auch bei den günstigsten Temperaturen, eine gewisse Zeit und verlaufen mit sinkender Temperatur immer langsamer. Man bekommt daher eine Unterkühlung von dem statistisch ungeordneten Zustand, wenn die Legierungen

von einer Temperatur über dem Umwandlungsgebiet abgeschreckt werden, und die so abgeschreckten Legierungen lassen sich sehr gut zu Draht auswalzen.

Die im Lichtbogenofen hergestellten Legierungen wurden direkt bei einer Temperatur etwas unterhalb des Schmelzpunkts durch Übergießen des glühenden Ofens mit Wasser effektiv abgeschreckt. In dem Vakuumofen war ein effektives Abschrecken nicht möglich. Die dort hergestellten Legierungen wurden nachher in das Temperaturgebiet, wo die Atomordnung unregelmäßig ist, gebracht und von da abgeschreckt. Dies geschah so, daß die Schmelzstücke mit ihren Tiegelchen in ein am einen Ende zugeschmolzenes Quarzrohr gesteckt wurden. Das Rohr wurde durch einen Gummischlauch mit der Vakuumpumpe verbunden und evakuiert. Das untere Ende mit der Schmelze wurde dann mit Gebläse oder in einem elektrischen Ofen zur erforderlichen Temperatur erhitzt und nachher direkt in kaltes Wasser gesteckt. Bei Temperaturen über 1300°C wurde diese verhältnismäßig weite Quarzröhre durch Außendruck zusammengedrückt, warum die Legierungen direkt in engeren evakuierten Quarzröhren eingeschmolzen wurden.

Sämtliche Legierungen wurden nach dem Auswalzen homogenisiert, d. h. mehrere Stunden im Vakuum erhitzt, und zwar bei einer Temperatur nahe dem Schmelzpunkt. Das Tempern der fertiggestellten Drähte geschah teils im Vakuumofen, teils nach Einschmelzen in Quarzröhren.

Allgemeines betreffend die Röntgenuntersuchungen

Bei den Aufnahmen wurde teils die Röntgenapparatur und Hochspannungsanlage, welche in voriger Mitteilung beschrieben ist, teils eine neuangelegte Hochspannungsanlage der Techn. Hochschule verwendet. Als Vakuumregulierungsvorrichtung haben wir statt Kapillarleitung ein Ventil verwendet von der Konstruktion derer, die auf den Leyboldschen Stahlpumpen angebracht sind.

Die meisten Aufnahmen sind mit Debye-Scherer-Kamera gemacht. Bei der trigonalen Phase, die in der Reihe Pt-Cu vorkommt, sind jedoch auch einige Aufnahmen nach der Seemann-Bohlinschen Fokussierungsmethode ausgeführt worden, wobei eine Präzisionskamera nach einer Konstruktion

von Phragmén zur Anwendung gekommen ist. Das Präparat war dabei in der Form eines dünn ausgewalzten Bleches.

Bei den Intensitätsberechnungen haben wir die Intensität als Produkt von Strukturfaktor, Kombinationszahl und Lorentzfaktor gesetzt. Dabei haben wir den Lorentzfaktor in der ursprünglichen Form verwendet. Unsere Proben waren nämlich massive, viereckige Stäbe, in denen die Absorption der Röntgenstrahlen größer für kleine als für große Winkel wurde und gewissermaßen von der Lage des Stabes abhängig war. Demgemäß sind die berechneten Werte nur verwendbar, um die relative Intensität von ziemlich naheliegenden Linien zu bewerten. Für unsere Zwecke war aber dies hinreichend, denn die Hauptsache ist eine Schätzung von der Intensität der Überstrukturlinien relativ der normalen Linien.

Zwischen K_{α} - und K_{β} -Linien ist ein Intensitätsverhältnis von 4:1 angenommen. Die Intensitäten der Überstrukturlinien sind unter der Annahme berechnet, daß das Streuvermögen einer Atomart seiner Atomnummer proportional ist. Die Größenordnung der relativen Zahlen ist so gewählt, daß die stärkste Linie die Intensität 1000 bekommt.

Resultate

I. Au-Cu

Zu den, in der Einleitung kurz wiedergegebenen, Resultaten unserer vorigen Mitteilung ist aus der fortgesetzten Untersuchung nur folgendes hinzuzufügen. Eine Legierung mit 50 At.-Proz. Au erhielt nach mehrmaligem Tempern einen Widerstand von $4,40 \cdot 10^{-6}$ Ohmcm, welcher Wert in der Spitze der Widerstands-Konzentrationskurve Kurnakows¹⁾ liegt. Das Achsenverhältnis dieser Probe, welches vermutlich nur wenig vom Grenzwert der idealen Ordnung abweicht, haben wir aus einer Röntgenaufnahme zu 1,08 ermittelt. Die stereometrische Berechnung, unter Annahme vollständig konstanter „Wirkungsradien“ der Atome gab den Wert 1,13. Eine kleine Deformation der „Wirkungssphären“ ist daher anzunehmen. Auffallend ist, daß das letzte Sinken des Widerstandes sehr langsam vor sich geht. Wiederholtes Erwärmen und Abkühlen

1) Vergleiche unsere frühere Arbeit a. a. O.

der Legierungen zwischen Zimmertemperatur und einer Temperatur entsprechend statistischer Verteilung scheint eine Beschleunigung des Einordnens zu bewirken.

II. Pd-Cu

Das Widerstandsdiagramm dieser Reihe ist früher von Sedström¹⁾ bestimmt worden. Er fand Abweichungen von der charakteristischen bogenförmigen Kurve einer ununterbrochenen Mischkristallreihe zwischen 38 und 50 At.-Proz. Pd. Sedström hatte aber seine Legierungen unterhalb 400° C nicht getempert, was erklärt, daß unsere Kurve von seiner bedeutend abweicht. Von Holgersson und Sedström²⁾ ist eine röntgenographische Untersuchung ausgeführt, die später

Tabelle 1

Widerstandswerte der Reihe PdCu
Ohmcm · 10⁺⁶ bei + 18° C

At.-Proz. Pd	Neu hergestellte Legierungen.			Von Sedström hergestellte Leg.		
	abgeschreckte, hartgewalzte, nicht gegläute	geglühte b. Schmelzpunkt 2–3 Stunden		At.-Proz. Pd	Werte nach S	nachher getemp.
		nicht getemp.	getemp.			
17,0	14,9	11,2	8,1	2,1	—	4,02
19,0	16,2	12,2	9,2	5,4	6,9	6,7
21,0	17,4	13,0	—	6,9	—	7,5
23,0	18,5	13,4	8,8	10,8	11,8	9,1
25,0	19,6	15,9	9,7	14,8	14,8	8,5
26,0	20,4	16,6	11,1	19,4	18,0	(11,6)
28,0	21,6	19,5	15,1	30,8	25,9	24,1
38,0	25,9	30,2	13,7	36,4	29,8	29,0
39,0	28,6	9,7	9,7	39,7	9,4	8,3
40,1	28,5	7,7	7,7	45,5	18,7	8,1
41,1	29,1	6,8	6,8	49,8	9,0	8,1
43,9	26,2	5,6	5,6	51,9	47,7	48,4
47,2	30,1	34,0	5,9	54,4	50,1	46,9
49,9	—	—	40,7	59,3	56,7	51,2
—	—	—	—	70,2	51,0	49,3
0	—	—	2,0	78,4	40,6	40,8
100	—	—	11,0	88,7	28,4	28,7

1) E. Sedström, Einige phys. Eigenschaften met. Mischkristalle. Diss., Stockholm 1924.

2) S. Holgersson u. E. Sedström, Ann. d. Phys. 75. S. 143. 1924.

von uns¹⁾ komplettiert und berichtigt worden ist. Es geht daraus hervor, daß in den Legierungen mit anormal kleinen Widerständen eine kubisch-körperzentrierte Phase auftritt, wo

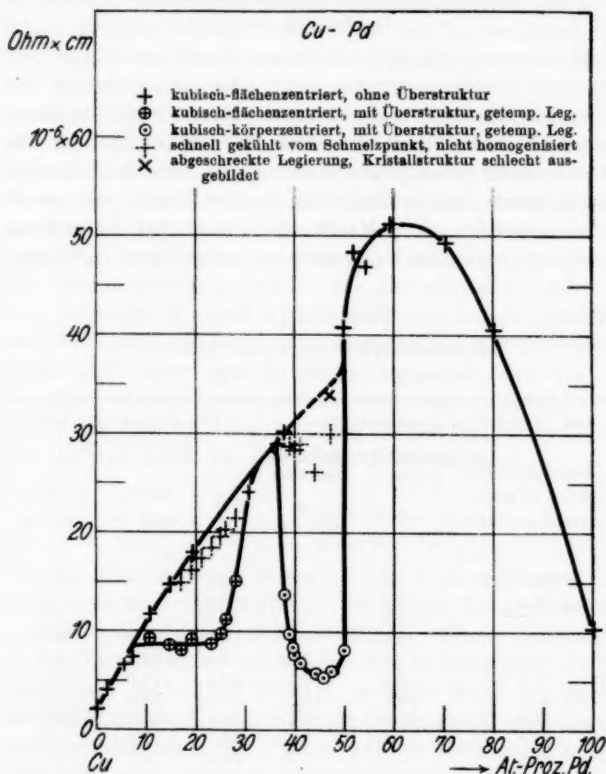


Fig. 2

die Komponenten regelmäßig verteilt sind, indem sie je eins von zwei ineinander gestellten, einfach kubischen Gittern besetzen.

Diese früheren Untersuchungen beziehen sich nur auf das 50 Proz.-Gebiet. Wir haben jetzt die Mischkristallreihe auch

1) C. H. Johansson u. J. O. Linde, a. a. O.

bei anderen Konzentration untersucht. Die von uns dabei gefundenen Widerstandswerte sind in der Tabelle 1 und in den Diagramm Fig. 2 angegeben. Es geht aus dem Diagramm sogleich hervor, daß außer bei 1 Cu:1 Pd auch bei 3 Cu:1 Pd Legierungen mit anormal kleinen Widerständen zu bekommen sind.

50 At.-Proz.-Gebiet

Der Verlauf der Kurve zwischen 38 und 50 At.-Proz. Pd ist in der Tat sehr interessant und es scheint uns möglich aus ihr, zusammen mit den Resultaten der Strukturuntersuchung, wichtige Schlüsse über die Atomsubstitution zu ziehen. Das Ausbleiben des körperzentrierten Gitters bei Pd-Konzentrationen über 50 At.-Proz. ist wohl so zu deuten, daß die Pd-Atome in diesem Gitter die Cu-Atome nicht substituieren können. Demgemäß sollte von den beiden einfachen kubischen Gittern, die das Körperzentrierte aufbauen, das eine ungemischt mit Cu besetzt sein. Knüpfen wir jetzt die Höjendahl-schen¹⁾ Anschauungen über die elektrische Leitfähigkeit in Metallen und Borelius'²⁾ Darstellung von dem Verlauf bei den Mischkristallen an, so ergibt sich als Folgerung eine Möglichkeit zur Erklärung der niedrigen Widerstandswerte zwischen 38 und 50 At.-Proz. Pd. Wenn nämlich, wie hier nach dem Gesagten gelten soll, Geraden oder Ebenen im Gitter vorhanden sind, die nur die eine Atomart enthalten, kann gemäß dieser Theorie das Leitvermögen einer Legierung sehr gut werden, und zwar von der Größenordnung des der reinen Metalle. Der Unterschied im Verlaufe der Widerstandskurven bei der Atomproportion 1:1 der beiden Reihen Au-Cu und Pd-Cu sollte also seinen Grund darin haben, daß in der ersteren Reihe, wo die Widerstandskurve eine symmetrische Spitze zeigt, die beiden Atomarten einander gegenseitig vertreten können, während in der letzteren nur die Cu-Atome als vikariierende Atome im geordneten Gitter auftreten können.

Für die oben gemachte Annahme spricht auch eine Beobachtung bei der Herstellung von Cu-Pd-Legierungen mit geordneter Atomverteilung. Es ist zwischen etwa 39 und

1) K. Höjendahl, Phil. Mag. 48. S. 349. 1924.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 77. S. 109. 1925.

45 At.-Proz. Pd nicht nötig, ein Tempern auszuführen, denn auch bei einer mäßigen Abkühlungsgeschwindigkeit scheidet sich die geordnete Phase aus, während bei höheren Pd-Konzentrationen (45—50 At.-Proz.) eine besondere Wärmebehandlung erforderlich wird. Mit Rücksicht auf die gemachte Folgerung, daß im geordneten Gitter das eine einfache Kubusgitter nur von Cu-Atomen aufgebaut sein muß, wird verständlich, daß bei genau 1 Cu:1 Pd oder bei naheliegenden Konzentrationen das Einordnen der Atome schwieriger vor sich geht als bei größerem Kupferüberschuß, denn im vorigen Falle muß die Ordnung vollständig oder beinahe vollständig sein, um überhaupt einzutreffen. Gleichzeitig wird verständlich, daß Sedström, dessen Legierungen verhältnismäßig schnell gekühlt wurden, bei 40 At.-Proz. Pd an ein spitzenförmiges Widerstandsminimum glauben konnte. Er bekam nämlich bei 39,7 Proz. Pd einen kleineren Widerstandswert als bei 45,5 Proz. Pd und wurde in dieser Auffassung noch mehr dadurch gestützt, daß die Legierungen um 40 At.-Proz. Pd sehr spröde waren.

Von allen den in diesem Gebiete zur Ermittlung des Widerstandsdiagramms benutzten Legierungen haben wir auch Röntgenaufnahmen gemacht. Sie bestätigen ohne Ausnahme die Resultate der vorigen Untersuchung und es ist daher nur folgendes zuzufügen.

Im Grenzgebiet bei etwa 38 At.-Proz. Pd bekommt man, wenn die Legierungen nach Tempern bei Temperaturen nahe dem Schmelzpunkt relativ langsam abgekühlt werden, bald ein zweiphasiges Kristallkonglomerat, bald nur die körperzentrierte Phase, ohne daß die Abkühlungsbedingungen wesentlich verschieden gewesen sind. Werden die Legierungen nach dem Tempern bei hoher Temperatur effektiv abgeschreckt und nachher bei etwa 400° C getempert, bekommt man nur die körperzentrierte Phase. Die Röntgendiagramme geben dabei in ersterem Falle Linien, die aus großen Interferenzflecken, entsprechend großen Kristalliten gebildet sind, während in letzterem Falle die Linien stetig geschwärzt sind und also die Kristallite klein sind. Vermutlich geschieht das Ordnen der Komponenten in ersterem Falle unter Umkristallisation an dem Umwandlungsgebiet.

Die nach Tempern bei hohen Temperaturen abgeschreckten Legierungen im Gebiete 38—50 At.-Proz. Pd deuten kubisch-flächenzentriertes Gitter an. Die Linien werden aber sehr lückenhaft und besonders in der Nähe von 50 Proz. treten nur einzelne Flecken hervor, was wohl darin seinen Grund hat, daß sich die Hauptmasse der Legierungen in einem halb amorphen Zwischenzustand befindet.

25 At.-Proz.-Gebiet

Nach der Tab. 1 und Fig. 2 sind in diesem Gebiete Widerstandsniedrigungen zwischen etwa 10 und 30 At.-Proz. Pd durch Tempern zu bekommen. Die Röntgenaufnahmen der Legierungen mit erniedrigten Widerständen zeigen, daß die Atomverteilung geordnet ist, indem außer den normalen Linien des kubisch-flächenzentrierten Gitters noch einige schwache Linien auftreten, wie aus dem in Taf. VII, Bild 1 reproduzierten Diagramme von einer Legierung mit 19,0 At.-Proz. Pd ersichtlich ist. Die Tab. 2 betrifft diese Legierung mit 19,0 At.-Proz. Pd. Die Indizes der Überstrukturlinien, die bei einer Atomverteilung gemäß der Fig. 3 auftreten müssen, werden hier angegeben. Es geht aus der Tabelle hervor, daß die ausgemessenen Extralinen zur Lage und Intensität die angenommene Verteilung gut satisfizieren. Sie ist dieselbe wie die bei 25 At.-Proz. Au in der Au-Cu-Reihe gefundene und betreffend die Berechnung von Lagen und Intensität weisen wir auf diese Arbeit¹⁾ hin. Noch bei einer Aufnahme mit nur 10,8 At.-Proz. Pd waren die meisten Überstrukturlinien sichtbar, trotz des verhältnismäßig kleinen Unterschieds in dem Streuvermögen der beiden Metalle.

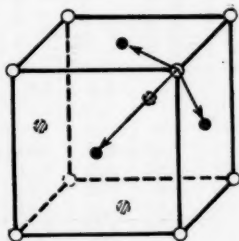


Fig. 3

Charakteristisch für die Legierungen in diesem Gebiete ist ihre geringe Neigung, in den geordneten Zustand überzugehen, besonders in der Nähe von 25 At.-Proz. Pd. Es ist erst nach wiederholtem und langem Tempern uns gelungen, die eingezeichneten niedrigen Widerstände zu erhalten.

1) C. H. Johansson und J. O. Linde, a. a. O.

Tabelle 2
CuPd 19,0 At.-Proz. Pd. Kupferstrahlung

S	sin φ (korr.)	Normale Linien		Überstruktur			sin $\varphi : \sqrt{\sum h_i^2}$		Intensität	
		$h_1 h_2 h_3$	$\sum h_i^2$	$h_1 h_2 h_3$	$\sum h_i^2$		K_α	K_β	n	Ber. Beob.
3,22	0,2975			001	1		0,210		6	37
3,52	0,326	111 β	3	011	2			0,188	12	37
3,90	0,3615	111	3				0,209		8	250
4,08	0,3785	002 β	4					0,189	8	1000
4,51	0,418	002	4				0,209		6	141
5,04	0,4655			012	5		0,2085		6	562
5,60	0,514			112	6		0,2095		24	30
5,82	0,533	022 β	8				0,2095		24	25
6,53	0,592	022	8				0,2095		12	141
6,98	0,627	113 β	11				0,2095		12	562
				003				0,189	24	205
				122			0,209		6	21
7,35	0,656	222 β	12					0,1895	24	63
7,88	0,6945	113	11	013	10		0,2075		8	15
8,30	0,7245	222	12				0,2095		24	818
8,78	0,7565			023	13		0,209		8	250
							0,210		24	11
9,20	0,783	004 β	16					0,189	6	36
9,87	0,8235	133 β	19	123	14		0,209		48	21
10,13	0,838	004	16				0,2095		24	119
10,25	0,844	024 β	20				0,2095		6	142
10,60	0,8625			014	17		0,209		24	113
				114	18		0,209		24	9
11,20	0,8915			033			0,210		24	12
11,72	0,914	133	19				0,2095		24	474
11,85	0,9265	224 β	24				0,2095		24	94
12,35	0,938	024	20				0,210		24	450
13,15	0,962			124	21		0,210		48	14
							0,210		24	24
14,04	0,983	511 β	27					0,189	24	111
		333 β		333	22		0,2095		24	7

III. Pt-Cu

Die früheren Untersuchungen über das elektrische Leitvermögen dieses Systems umfassen nur kleinere Konzentrationsgebiete. Von Barus¹⁾ sind einige Legierungen mit kleinen und großen Pt-Konzentrationen untersucht worden. Seine Werte für die zwei Pt-reichen Legierungen mit 90,4 bzw. 94,4 At.-Proz. Pt sind in dem Widerstand-Konzentrationsdiagramme (Fig. 4) und in Tab. 3 neben dem unsrigen eingezeichnet. Sedström²⁾, der die Reihe an der Kupferseite untersucht hat, gelang es nicht Legierungen mit höherem Pt-Gehalt als etwa 40 At.-Proz. zu bearbeiten. Er neigte der Ansicht zu, daß das Gebiet zwischen etwa 10 und 20 At.-Proz. Pt

Tabelle 3

Widerstandswerte der Reihe PtCu

Ohmcm · 10⁺⁶ bei + 18° C

Neu hergestellte Legierungen.					Von Sedström hergestellte Leg.				
At.-Proz. Pt	abgeschr., hart- gewalzte, n. geglähte	geglühte beim Schmelzpunkt 2—3 Stunden			At.-Proz. Pt	Werte nach S	nachher getemp.	abgeschr. von 1000° C	
		nicht getemp.	getemp.	allg.					
12,5	—	—	19,4	47,5 ³⁾	2,0	5,6	—	—	
35,0	61,0	68,0	—		4,9	10,5	—	—	
41,0	85,2	67,0	48,6		8,2	18,2	19,6	—	
45,0	—	—	39,5		10,2	22,9	21,1	—	
49,8	—	—	18,9		11,4	22,1	19,8	22,6	
50,0	81,9	19,5	19,5	47,2 ⁴⁾	14,5	20,8	18,0	26,0	
50,0	92,8	25,6	18,6		16,7	20,5	17,9	—	
52,0	93,4	—	21,2		19,5	22,4	17,2	35,7	
55,0	92,6	32,1	27,4		21,9	24,7	14,9	—	
60,0	79,4	37,0	—		24,8	39,8	14,7	43,5	
60,9	75,3	36,9	33,7		26,1	52,0	40,3	—	
64,9	69,3	44,1	41,0		29,7	64,6	59,4	56,8	
70,0	67,2	46,0	40,5		39,9	74,8	50,9	73,3	
75,0	92,0	84,9	58,7		Nach Barus:				
100,0	—	—	10,5		90,4	50,6	—	—	
					94,4	23,6	—	—	

1) Barus, Sill. Amer. Journ. Science 36. S. 427. 1888.

2) E. Sedström, a. a. O.

3) abgeschreckt von 700° C. Neues kubisches Gitter.

4) „ „ 900° C. Trigonal mit s nur halb so groß, als wenn der Widerstand gleich $27,4 \cdot 10^{-6}$ Ohmcm ist.

zweiphasig sei. Es wird aus dem folgenden ersichtlich werden, daß die eigentümliche Form der Widerstandskurve in Wirklichkeit eine andere Ursache hat.

Wir haben nun teils die von Sedström hergestellten Legierungen, die weiter getempert worden sind, teils neue

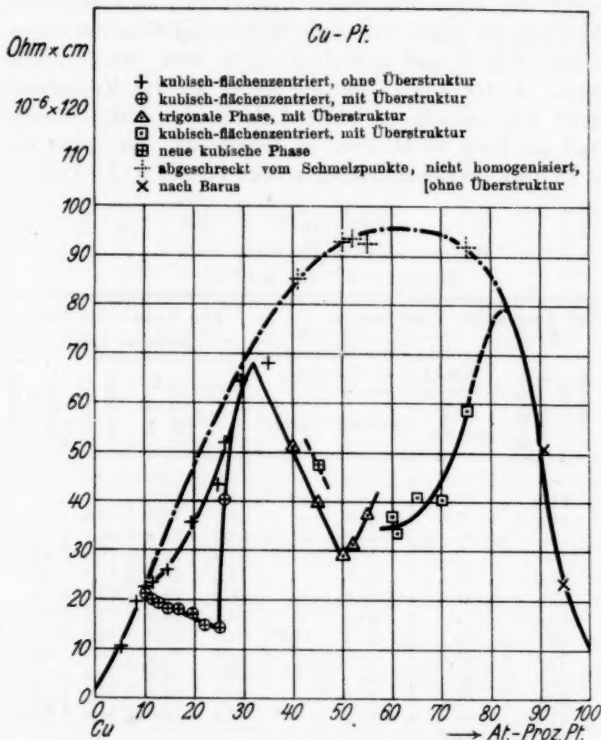


Fig. 4

Legierungen im mittleren Konzentrationsgebiete, deren Herstellung in Drahtform nach dem oben beschriebenen Verfahren gelungen ist, auf Widerstand und Struktur untersucht. Die von Temperaturen nahe dem Schmelzpunkt abgeschreckten Legierungen geben eine Widerstandskurve von normaler Bogenform. Die langsam gekühlten Legierungen liegen bei kleinen

und großen Pt-Konzentrationen sowie auch um etwa 30 Proz. nahe dieser Kurve. Um 25 Proz. und um 50 Proz. erscheinen dagegen ausgedehnte Gebiete mit kleinen Widerständen und geordneten Atomstrukturen, die jetzt näher beschrieben werden sollen.

50 At.-Proz.-Gebiet

Das Konzentrationsintervall, beiderseits 50 Proz., in dem Legierungen mit erniedrigten Widerständen zu bekommen sind, ist auffallend weit. Im Vergleich mit den Verhältnissen bei Au-Cu und Pd-Cu sind die Legierungen dadurch ausgezeichnet, daß die Neigung zum Einordnen der Atome (mit entsprechender Widerstandsverminderung) sehr ausgeprägt ist. Die höchsten Widerstandswerte zwischen 40 und 75 At.-Proz. Pt von etwa $90 \cdot 10^{-6}$ Ohmcm waren demgemäß nur durch ein überaus kräftiges Abschrecken bei einer Temperatur nahe dem Schmelzpunkt zu bekommen. Andernfalls bekam man verhältnismäßig kleine, von der Abkühlungsgeschwindigkeit und von dem Tempern bei niedrigen Temperaturen abhängige Widerstandswerte. Nach langsamer Abkühlung und Tempern bei etwa 400° C ergab sich dabei zwischen 40 und 55 At.-Proz. Pt eine trigonale Phase, und zwischen 60 und 75 At.-Proz. Pt eine kubische Phase mit einer Atomanordnung entsprechend der von Tammann für die Prop. 1:1 als „normale Verteilung mit bestmöglicher Durchmischung“ angegebenen. Bei 45,0 At.-Proz. Pt haben wir durch Tempern und Abschrecken von etwa 700° C noch eine neue Phase aufweisen können. Die verschiedenen Phasen werden unten je für sich besprochen.

1. Die Phase mit statistischer Verteilung

Die Legierungen mit den höchsten Widerstandswerten, die in der Fig. 4 mit gestrichelten Kreuzen bezeichnet sind, zeigen kubisch-flächenzentriertes Gitter ohne extra Maxima, was auf eine statistische Verteilung der beiden Atomarten hinweist. Die Röntgendiagramme dieser Legierungen sind nicht besonders gut, was nicht zu wundern ist, da die Drähte bei einer Temperatur nahe dem Schmelzpunkt (1450° bis 1650° C) abgeschreckt worden sind. Homogenisierte und bei 1350° C abgeschreckte Legierungen gaben Widerstände, die bei

etwa $70 \cdot 10^{-6}$ Ohmcm lagen. Auch bei diesen waren keine Überstrukturlinien zu sehen.

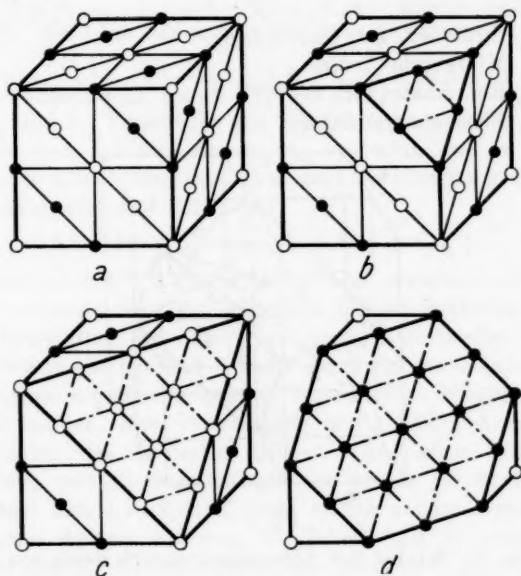
2. Die trigonale Phase

Das Debye-Scherrer-Diagramm einer Legierung mit 50 At.-Proz. Pt ist in Taf. VII, Bild 2a reproduziert. Daraus geht sofort hervor, daß in Analogie mit den Verhältnissen bei Au-Cu, das kubisch-flächenzentrierte Gitter der Komponenten, das in Legierungen mit statistisch ungeordneter Verteilung noch besteht, durch das Tempern in einen ganz neuen Gittertypus übergegangen ist. Die kräftigen Linien entsprechen aber hier nicht wie bei Au-Cu einer tetragonalen sondern einer trigonalen Kristallstruktur.

Dies Entstehen eines nichtkubischen Gitters aus zwei kubisch-kristallisierenden Komponenten ist hier wie dort ein derartiges Ordnen der Komponenten zuzuschreiben, daß das Gitter sich nicht mehr in irgendeine kubische Symmetrieklasse einordnen läßt, wenn die beiden Atomarten als ungleichwertig betrachtet werden. Bekanntlich kann das kubisch-flächenzentrierte Gitter als kubische „dichteste Kugelpackung“ betrachtet werden, wo die Ebene dichtester Packung senkrecht zur Körperdiagonale und also parallel der (111)-Ebenen liegen. Nimmt man jetzt an, daß bei der Atomproportion 1 Pt:1 Cu die Ebenen senkrecht einer bestimmten Würfelkörperdiagonale jede nur mit einer von den Komponenten besetzt sind, und zwar so, daß jede zweite Ebene von Cu-Atomen und jede zweite von Pt-Atomen aufgebaut ist, bekommt man eben eine Anordnung mit trigonaler Symmetrie (vergleiche Fig. 5). Wegen der verschieden großen „Wirkungssphären“ der Komponenten hat man eine Deformierung des Kubus zu erwarten und dabei soll, wie eine stereometrische Betrachtung sofort zeigt, die Würfelkörperdiagonale senkrecht zu den besprochenen Ebenen, die nur mit einer Komponente besetzt sind, verkürzt werden. Eine Kontrolle dieser gittersymmetrisch und stereometrisch gegründeten Modelle hat man in den Überstrukturlinien, die entstehen sollen, weil das Streuvermögen der Komponenten verschieden ist. In der Tat zeigen die Diagramme außer den normalen Linien des trigonalen Gitters alle die berechneten Überstrukturlinien, und nur diese. Die beobachteten Inten-

sitäten sind auch in bester Übereinstimmung mit den berechneten.

Wenn die Koordinatenachsen des ursprünglichen kubischen Gitters, die nach der Deformation natürlich nicht mehr senkrecht zueinander sind, beibehalten werden, enthält die Elementarzelle 32 Atome (vergleiche Fig. 5a). Die kleinste mögliche Elementarzelle bei der gegebenen Atomverteilung ist freilich



Cu-Pt. 50 At.-Proz. Pt. Trigonale Phase. *b*, *c* und *d* die Atom-anordnung in drei aufeinanderfolgenden Oktaederebenen

Fig. 5

ein körperzentriertes Rhomboeder, wo die Basis nur zwei Atome enthält. Um aber einen bequemeren Vergleich der hier vorliegenden Struktur mit der kubischen zu machen, die im nächsten Abschnitt behandelt werden wird, haben wir bei der folgenden Berechnung der Intensitäten es für zweckmäßig befunden, eine rhomboedrische Translation mit 8 Atomen in Elementarkörpern gemäß Fig. 6 zu benutzen. (Die in Figur gezeichnete Atomverteilung der Komponenten gilt nicht diesem Fall.) Die Trans-

lation kann nämlich für die Berechnung beider Strukturen benutzt werden und die Resultate werden so am besten vergleichbar.

Für die Berechnung des Strukturfaktors gilt

$$S = \left| \sum_{k=1}^n \Phi_k \cdot e^{i\varrho_k} \right|^2$$

$$\varrho_k = \pi [(\alpha - \alpha_0) \cdot r_{kx} + (\beta - \beta_0) r_{ky} + (\gamma - \gamma_0) r_{kz}]$$

$$2\pi h_i = \pi [(\alpha - \alpha_0) a_{ix} + (\beta - \beta_0) a_{iy} + (\gamma - \gamma_0) a_{iz}]$$

Φ_k Streuvermögen eines Atoms,

h_i Millersche Indizes,

r_k Koordinatenwert der k^{ten} Atome in Elementarzelle,

a_i Elementartranslation.

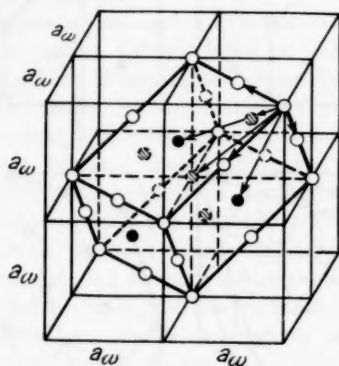


Fig. 6

Weil die Winkel des Achsenkreuzes sich wenig von denen eines kubischen Gitters unterscheiden, kann die Berechnung der Intensitäten ohne größere Fehler so ausgeführt werden, als ob das Gitter kubisch wäre. Es ergibt sich dann für die Koordinaten der Atomlagen

$$\text{Cu: } (0, 0, 0) \left(a_w, \frac{a_w}{2}, \frac{a_w}{2} \right) \left(\frac{a_w}{2}, a_w, \frac{a_w}{3} \right) \left(\frac{a_w}{2}, \frac{a_w}{2}, a_w \right),$$

$$\text{Pt: } (a_w, a_w, a_w) \left(0, \frac{a_w}{2}, \frac{a_w}{2} \right) \left(\frac{a_w}{2}, 0, \frac{a_w}{2} \right) \left(\frac{a_w}{2}, \frac{a_w}{2}, 0 \right)$$

und nach Einsetzen

$$S = |[A + B \cdot e^{\pi i (h_1 + h_2 + h_3)}][1 + e^{\pi i (h_2 + h_3)} + e^{\pi i (h_1 + h_3)} + e^{\pi i (h_1 + h_2)}]|^2,$$

wenn für Cu $\Phi_k = A$ und für Pt $\Phi_k = B$ gesetzt wird.

Man bekommt daraus

1. h_i gemischt $S = 0$,
2. h_i gerade $S = 16(A + B)^2$,
3. h_i ungerade $S = 16(A - B)^2$.

Fall 2 entspricht eben den normalen Interferenzmaxima, während 3. den Strukturfaktor der Überstrukturlinien gibt. Die letzteren werden natürlicherweise identisch gleich Null, wenn $A = B$.

Für die Lage der Linien gilt beim trigonalen Gitter

$$\sin^2 \varphi = \frac{\lambda^2}{4a^2} [k_{11}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + k_{12}(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3)],$$

wo k_{11} und k_{12} Funktionen der Winkel des trigonalen Achsenkreuzes sind. Wenn man $k_{12}:k_{11} = \varepsilon$ setzt, das ja für ein gegebenes Gitter konstant ist, so sagt die Gleichung aus, daß die Sinusquadrate, dividiert mit

$$[h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \varepsilon(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3)],$$

für eine bestimmte Wellenlänge konstant ausfallen sollen. Für $\varepsilon = 0$ bekommt man den Ausdruck für ein kubisches Gitter. Die Deformation der Würfel zu einem Rhomboeder machen die ε -Werte endlich und bewirkt also, wie hervorgeht, wenn die Indizes mit allen möglichen Vorzeichenkombinationen eingesetzt werden, eine Verschiebung und teilweise Aufspaltung der Linien des kubischen Gitters. Aus einer Präzisionsaufnahme mit Eisenantikathode für gerade 50 At.-Proz. Pt berechnet sich ε zu 0,0315, wenn h_i sich auf die ursprünglich kubischen Achsen beziehen (in Tabelle mit h_i' bezeichnet). Anstatt der für ein kubisch-flächenzentriertes Gitter charakteristischen Quadratensummen 3; 4; 8; 11; 12; 16; 19; 20; 24; . . . usw. bekommt man dann die Summen 2,969; 3,095; 4,000; 7,874; 8,126; 10,843; 10,969; 11,221; 11,874; 12,378; 16,000; 18,717; 19,095; 19,473; 19,748; 20,252; 23,622; 23,874; 24,630 . . . usw. Analog ergeben sich für die Überstrukturlinien anstatt 3:4; 11:4; 19:4; 27:4; 35:4 . . . usw. die Werte 0,774; 2,711; 4,774; 6,837; 6,960; 8,648 . . . usw.

In den Tabellen 4 und 5, die sich auf Legierungen mit trigonaler Struktur beziehen, sind sowohl die Indizes entsprechend 8 Atomen (mit $h_1 h_2 h_3$ bezeichnet) in der Elementarzelle, als auch die Indizes entsprechend 32 Atomen eingeführt

Tabelle 4
CuPt 50,0 At.-Proz. Pt. Trigonales Gitter. Eisenstrahlung

S	sin φ (korr.)	Normale Linien			Überstruktur		sin $\varphi : \sqrt{\Sigma'}$		Intensität	
		$< h_1 h_2 h_3 >$	$< h_1' h_2' h_3' >$	Σ'	$< h_1 h_2 h_3 >$	$< h_1' h_2' h_3' >$	K_α	K_β	n	Ber. Beob.
2,25	0,204				111	111 β	0,774	0,232	2	70 s
2,47	0,225					111	0,774	0,2305	2	280 m
4,09	0,3795					113 β	2,711	0,2305	6	55 s
4,33	0,4015			2,969 3,095					6	334 m
4,54	0,4205				111	113	2,711	0,2555	2	229 m
4,73	0,438	002	111	2,969				0,2545	6	1000 st
4,83	0,447	222	111	3,095				0,2555	2	333 st
4,99	0,461		002 β	4,000				0,2305	6	188 s
5,56	0,511	022	002	4,000	113	331	4,774	0,2555	6	730 st
6,12	0,558		022 β	7,874				0,2555	6	133 s
7,25	0,648				133	115	6,887	0,231	6	94 ss
7,46	0,664				333	333	6,960	0,253	6	124 s
8,15	0,714	022	022	7,874				0,2545	6	375 st
8,31	0,725	224	022	8,126	113	153	8,648	0,2545	6	378 st
8,64	0,7475								12	71 m
8,86	0,762		113 β	10,84				0,231	6	203 m
9,01	0,772		113 β	10,97				0,2305	12	68 s
9,36	0,793		113 β	11,22				0,2305	6	63 s
9,60	0,8075		222 β	11,87				0,2295	2	21 ss
9,84	0,822		222 β	12,38	113	935	10,59	0,253	6	59 s
10,19	0,841	222	113	10,84				0,255	6	818 s st
10,44	0,854	204	113	10,97				0,255	12	273 st
10,86	0,8755	004	113	11,22				0,2545	6	250 st
11,10	0,887		222	11,87				0,231	6	32 ss
11,24	0,893	444	222	12,38				0,254	12	83 m
11,44	0,900							0,254	2	50 ss

Tabelle 5

Cu-Pt 50,0 At.-Proz. Pt
 Trigonales Gitter. Präzisionsaufnahme mit Fokussierungskamera. Kupferstrahlung

S	sin φ	Normale Linien		Überstruktur		sin $\varphi \sqrt{\Sigma'}$		Intensität				
		$\langle h_1 h_2 h_3 \rangle$	$\langle h_1' h_2' h_3' \rangle$	Σ'	$\langle h_1 h_2 h_3 \rangle$	$\langle h_1' h_2' h_3' \rangle$	Σ'	K_α	K_β	n	Ber.	Beob.
8,88	0,7018	004	222	11,87		$\overline{355} \beta$ 137 β	14,71 14,84	0,2037	0,185	6 6 12	250 32	st ss
8,76	0,7067											
8,55	0,7157	444	222	12,38				0,2034		2	83	m
8,33	0,7246							0,2037		6	50	st
8,05	0,7359		004 β	16,000	138	117	12,65	0,2039	0,1840	6	97	st
					115	355	13,03	0,2041		6	129	st
6,80	0,7842				135	137	14,71 14,84			12		
6,50	0,7959		133 β	18,72				0,2039	0,1840	12	79	s
5,92	0,8157	044	004	16,000						6	187	st
5,55	0,8282		024 β	20,25				0,2039	0,1840	12	75	s
5,05	0,8444				355	397	17,15	0,2039		6	88	s
4,03	0,8754				133	157	18,46	0,2037		12	68	m
4,03	0,8754							0,2037		12	316	st
3,81	0,8815	204	133	18,72				0,2038		6	158	m
3,47	0,8909	226	133	19,10	555	555	19,34			2	12	—
								0,2035		6	158	m
3,20	0,8981	446	133	19,47				0,2039		12	300	st
2,88	0,9062	224	024	19,75				0,2038		12	300	st
2,45	0,9173	246	024	20,25	115	357	20,52	0,2038		12	62	s
2,17	0,9233							0,2038		12		

und mit $h_1' h_2' h_3'$ bezeichnet. Diese letzteren haben wir daher eingeführt, weil sie den Zusammenhang des Gitters mit dem kubisch-flächenzentrierten klarmachen. Von den übrigen Bezeichnungen in den Tabellen bedeutet S bei den Debye-Scherrer-Aufnahmen die direkt gemessenen Linienabstände zweier symmetrischer Linien, und bei der Präzisionsaufnahme die Abstände der Linien von einer Kante des Filmes. Σ' bedeutet die Summen der quadratischen Form, welche für die normalen Linien und die Überstrukturlinien je für sich eingeführt sind. Das Zeichen $<>$ um den Indizes soll andeuten, daß die hingeschriebene Indizeskombination alle gleichwertigen Kombinationen einschließt. Schließlich sind unter Intensität die Kombinationszahlen und die berechneten und geschätzten Intensitäten wiederzufinden. Aus den Tabellen geht hervor, daß alle die berechneten Linien wenigstens als K_α -Linien erscheinen und innerhalb der Fehlergrenzen in richtige Lage kommen, wie dies aus der Konstanz des Quotienten $\sin \varphi : \sqrt{\Sigma'}$ ersichtlich ist. Die schwächsten K_β -Linien sind nicht mit sichtbarer Stärke vorhanden. Sämtliche observierte Linien fügen sich in das berechnete Schema ein.

Die Legierung mit 55,0 At.-Proz. Pt mit dem niedrigsten Widerstande zeigte einen ε -Wert, der nur unbedeutend von dem der 50prozentigen Probe abweicht. Wir haben indessen diese Probe bei 900° C getempert und von dieser Temperatur durch Überführen in kaltes Wasser effektiv abgeschreckt. Der Widerstand war dabei bedeutend erhöht, wie aus der Tab. 3 zu sehen ist. Im Röntgenbild zeigte die so behandelte Probe das trigonale Gitter mit sehr verkleinertem Wert der Konstante ε . Es ergab sich $\varepsilon = 0,014$. Die Überstrukturlinien waren alle die für die trigonale Verteilung berechneten und waren von bemerkenswert starker Intensität.

Es mag weiter erwähnt werden, daß die Intensitäten von Überstrukturlinien von der Behandlungsweise der Präparate stark abhängig sind. Werden die natürlichen Ebenen einer Probe durch Walzen oder in anderer Weise zerstört, erleiden die Überstrukturlinien viel größere Intensitätserniedrigung als die normalen Linien. Bei Vergleichung der Intensitäten bei verschiedenen Konzentrationen muß man daher auch die Behandlungsweise der Präparate berücksichtigen.

Tabelle 6
Cu-Pt 60,9 At.-Proz. Pt. Eisenstrahlung

S	sin φ	Normale Linien			Überstruktur			sin $\varphi : \sqrt{\sum h_i'^2}$	Intensität			
		$\langle h_1 h_2 h_3 \rangle$	$h_1' h_2' h_3'$	$\sum h_i'^2$	$\langle h_1 h_2 h_3 \rangle$	$h_1' h_2' h_3'$	$\sum h_i'^2$		K_α	K_β	n	Ber.
2,38	0,216		111 β	3	111	111	0,75	0,250	0,2265	8	209	s
4,23	0,392				111		2,75	0,249		8	250	st
4,45	0,4125			3		113		0,250		24	172	m
4,67	0,4325	002	200 β	4		333 β	4,75		0,2265	8	1000	s st
4,80	0,453								0,228	6	141	m
5,29	0,4975							0,2495		6	25	s s
5,42	0,499	022	200	4	113	133	4,75	0,249		24	562	st
5,93	0,5425					333 β	6,75		0,2275	8	99	m
6,58	0,596		220 β	8		511 β				8	23	s s
7,16	0,641				133	333	6,75		0,227	12	141	m
7,30	0,652					511		0,251		8	93	s
8,10	0,710	224	220	8	113		8,75	0,251		12	562	st
8,55	0,741					531		0,250		48	108	m
8,75	0,7545	204	113 β	11					0,2275	24	205	m
9,27	0,7875		222 β	12	113		10,75		0,2275	8	63	s
9,85	0,822					335		0,251		24	44	s
10,07	0,835	204	133	11				0,2515		24	818	s st
10,77	0,871	004	222	12				0,251		8	250	st

3. Die kubische Phase mit Atomverteilung, entsprechend Tammanns „beste Durchmischung“

Wie schon aus der Widerstandskurve zu vermuten ist, tritt bei größerem Pt-Gehalt als etwa 55 At.-Proz. eine neue Phase auf. Die Röntgenaufnahmen lassen auch erkennen, daß diese Phase, obschon die Komponenten geordnet verteilt sind, kubische Symmetrie besitzt. Das Debye-Scherrer Diagramm einer Legierung mit 60,9 At.-Proz. Pt ist in Taf. VII, Bild 3 reproduziert und die Data des Diagrammes in Tab. 6 gegeben. Es geht daraus sofort hervor, daß die stärksten Linien dem normalen flächenzentrierten Gitter entsprechen. Die übrigen Linien, die ein kubisches Gitter mit der doppelten Würfelkante satisfizieren, sind als Überstrukturlinien zu deuten. Von Tammann ist für das kubisch-flächenzentrierte Gitter, Proportion 1:1, eine Atomverteilung (von ihm als „die normale“ bezeichnet) angegeben (Fig. 7)¹⁾, deren Elementarzelle eben 32 Atomen enthält und die, wie eine Untersuchung leicht zeigt, kubische Symmetrie besitzt. Die von diesem Modelle geforderten Überstrukturlinien stimmen gut mit den gefundenen Extraliniien und zwar sowohl betreffend Lage wie Intensität. Bei der Berechnung des Strukturfaktors haben wir aus Gründen, die oben angeführt sind, die rhomboedrische Elementarzelle mit 8 Atomen gewählt. Sie ist übrigens in diesem Falle die kleinstmögliche.

Es ergibt sich gemäß der Fig. 6 für die Koordinaten

$$\text{Cu: } (0, 0, 0) \left(0, \frac{a_w}{2}, \frac{a_w}{2}\right) \left(\frac{a_w}{2}, 0, \frac{a_w}{2}\right) \left(\frac{a_w}{2}, \frac{a_w}{2}, 0\right)$$

$$\text{Pt: } (a_w, a_w, a_w) \left(a_w, \frac{a_w}{2}, \frac{a_w}{2}\right) \left(\frac{a_w}{2}, a_w, \frac{a_w}{2}\right) \left(\frac{a_w}{2}, \frac{a_w}{2}, a_w\right)$$

und nach Einsetzen

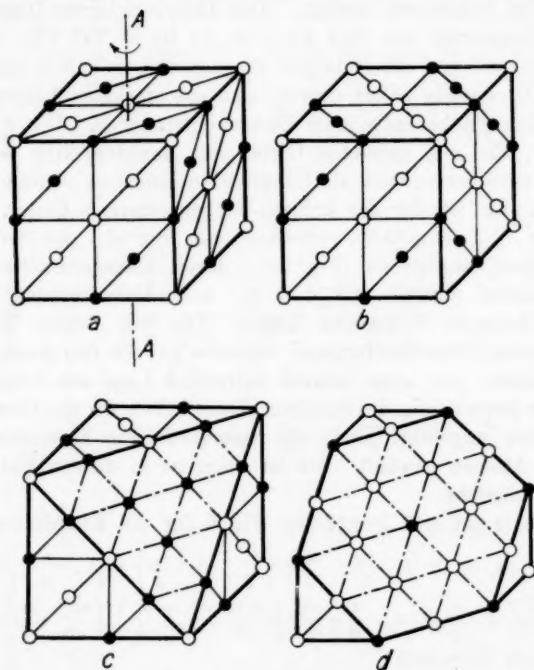
$$S = [A + B \cdot e^{\pi i (h_1 + h_2 + h_3)}] [1 + e^{\pi i h_1} + e^{\pi i h_2} + e^{\pi i h_3}]^2,$$

wo $\Phi_k = A$ für Cu und $\Phi_k = B$ für Pt wie vorher gesetzt werden. Man bekommt hier

1. $2 h_i$ ungerade, $1 h_i$ gerade; $S = 0$.
2. h_i ungemischt, gerade; $S_N = 16(A + B)^2$.
- 3a. h_i ungemischt, ungerade; $S_V = 4(A - B)^2$.
- 3b. $1 h_i$ ungerade, $2 h_i$ gerade; $S_V = 4(A - B)^2$.

1) Vgl. Fig. 199, S. 365 in Tammanns Lehrbuch der Metallographie. 3. Aufl.

Fall 2 entspricht den normalen Linien, während 3a und b den Strukturfaktor der Überstrukturlinien geben. Ein Vergleich mit der Berechnung der trigonalen Phase zeigt, daß die Bedingungen für die Intensitäten der Überstrukturlinien relativ den Normalen ziemlich verschieden sind. So wird in dem letzten Falle die Kombinationszahl einer Linie sehr viel



Cu-Pt. 50 At.-Proz. Pt. Kubische Phase. *b* nach Drehung von a 90° um $A-A$ oder durch Parallelverschiebung ($\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0$). *c* und *d* die Atomanordnung in zwei aufeinanderfolgenden Oktaederebenen

Fig. 7

größer, teils weil die Linien nach 3a nicht wie beim trigonalen Gitter aufgespalten werden, teils weil die Indizeskombinationen nach 3b hinzukommen. Andererseits wird das Verhältnis $S_H : S_N$ beim trigonalen Gitter viermal größer als hier.

Die Quadratensummen der Überstrukturlinien, bei denen

h'_i sich auf das rechtwinklige Achsenkreuz bezieht, werden hier gleich 3:4; 11:4; 19:4; 27:4 usw.

Auch die Legierungen mit 64,9, 70,0 und 75,0 At.-Proz. Pt mit den in der Kurve eingezeichneten niedrigen Widerständen zeigten im Röntgenbild schwache Überstrukturlinien entsprechend der Tammannschen Gruppierung für die Konzentration 1:1. Tab. 7 gibt die Berechnung für 75,0 At.-Proz. Pt wieder. Es ist doch nicht gelungen, alle die zu erwartenden Überstrukturlinien wiederzufinden. Aus der Tabelle geht auch hervor, daß die Übereinstimmung nicht so gut wie bei der 60prozentigen Probe ist, aber in Betrachtung der Schwäche der Extramaxima sind die Abweichungen ohne Zweifel Meßfehlern zuzuschreiben. Es scheint uns daher ausgeschlossen, daß die Verteilung hier eine andere als bei 60 Proz. Pt wäre. Demgemäß ist in diesen Legierungen die Atomverteilung die, bei der Proportion 1:1, normale Tammannsche mit den überschüssigen Pt-Atomen durch Zufall in dem geordneten Gitter eingesetzt. Jedenfalls sollte die Anordnung der Fig. 3, die bei Atomverhältnis 1:3 die einfachst mögliche ist, ganz andere Extramaxima liefern. Auch bei 64,9 und 70,0 At.-Proz. Pt waren die Überstrukturlinien sehr schwach.

Kurz vor dem Abschluß dieser Arbeit erhielten wir, durch Tempern und Abschrecken einer trigonalen Probe mit 45,0 At.-Proz. Pt von etwa 700° C, eine neue Phase (nebst Spuren der ursprünglichen trigonalen). Das Gitter scheint kubisch zu sein mit etwa 64 Atomen in dem Elementarwürfel. Wir hoffen in einer folgenden Mitteilung eine Berechnung dieses Gitters liefern zu können.

Das 25 At.-Proz.-Gebiet

Auch hier ist es, wie aus dem Widerstandsdiagramme Fig. 4 hervorgeht, möglich, Legierungen mit erniedrigtem Widerstande zu bekommen.

Eine Röntgenaufnahme von einer Legierung mit 16,7 At.-Proz. Pt und erniedrigtem Widerstand ist in Taf. VII, Bild 4 wiedergegeben. Die berechneten Resultate sind in Tab. 8 zusammengestellt. Man sieht daraus, daß die stärksten Linien einem kubisch-flächenzentrierten Gitter entsprechen, während die Extramaxima der regelmäßigen Atomverteilung der beiden

Tabelle 7
Cu-Pt 75,0 At.-Proz. Pt. Kupferstrahlung

S	sin φ	Normale Linien			Überstruktur			sin $\varphi : \sqrt{\sum h_i'^2}$		Intensität	
		$\langle h_1 h_2 h_3 \rangle$	$h_1' h_2' h_3'$	$\sum h_i'^2$	$\langle h_1 h_2 h_3 \rangle$	$h_1' h_2' h_3'$	$\sum h_i'^2$	K_α	K_β	n	Ber. Beob.
em	kor.										
—	—				111	111	0,75	—	0,183	8	209 s
3,40	0,3145		111 β	3	111	111	0,75	—	0,183	24	172 ss
3,56	0,330				111	113	2,75	0,199		8	1000
3,76	0,348	002	111	3				0,201		6	141 s
3,95	0,366	002	002 β	4				0,195	0,183	6	562 st
4,30	0,399	022	002	4	113	133	4,75			24	99 s
—	—		022 β	8		333			0,180	12	141 s
5,55	0,510				133	115	6,75	0,203		8	93 ss
5,75	0,527		022	8	113	135	8,75	0,200		12	562 st
6,20	0,565	224			113					48	108 —
—	—		113 β	11					0,180	24	205 m
6,60	0,5975		222 β	12					0,180	8	63 s
6,94	0,624				113	335	10,75	0,1965		24	44 ss
7,20	0,6445							0,200		24	818 st
7,45	0,663	204	113	11				0,200		8	250 st
7,84	0,692	004	222	12	335	155	12,75	0,1985		24	66 ss
8,05	0,707					117				24	36 s
8,23	0,7195		004 β	16					0,180	6	96 s
8,95	0,7675				115	355	14,75	0,200		24	119 m
9,22	0,7845	044	133 β	19		137			0,1795	24	142 m
9,45	0,7985		004	16				0,1995		6	113 s
9,57	0,806		024 β	20					0,180	24	113 s
9,80	0,819				355	337	16,75	0,2015		24	26 ss
10,30	0,847				555	555	18,75	0,196		48	59 ss

Tabelle 8
Cu-Pt 16,7 At.-Proz. Pt. Eisenstrahlung

S	sin φ		Normale Linien		Überstruktur		sin $\varphi : \sqrt{\sum h_i^2}$		Intensität	
	cm	korr.	$h_1 h_2 h_3$	$\sum h_i^2$	$h_1 h_2 h_3$	$\sum h_i^2$	K_α	K_β	n	Ber.
2,83	0,7985	0,2635			001	1	0,2635		6	198
3,98	0,847	0,3725			011	2	0,2635	0,239	12	198
4,42	0,8715	0,413		3					8	250
4,89	0,882	0,4555	111 β	3			0,263		8	1000
5,10	0,894	0,474	111	4				0,237	6	140
5,69	0,913	0,525	002 β	4					6	562
6,42	0,937	0,5855	002		012	5	0,2625		24	158
7,15	0,949	0,643		8	112	6	0,263	0,238	24	132
7,55	0,957	0,6755	022 β	8			0,263		12	140
8,55	0,980	0,7435	022						12	562
9,24	0,986	0,788	113 β	11	003	9	0,263	0,238	24	205
9,93	0,993	0,829	222 β	12	122	10	0,262	0,239	30	110
					013				8	63
									24	79

9,45	0,7985	0,44	004	16	355	337	16,75	0,1995	0,180	24	6	142	m
9,57	0,806		024 β	20	555	555	18,75	0,2015		24	24	113	s
10,30	0,847				555	555	18,75	0,196		48	59	58	ss
10,78	0,8715	226	138	19				0,200		24	474	474	st
11,00	0,882		224 β	24					0,180	24	94	94	s
11,25	0,894	246	024	20				0,200		24	450	450	st
11,7	0,913				155	119	20,75	0,2005		24	68	68	ss
12,32	0,937		338 β	27					0,1805	8	111	111	m
			115 β							24	48	48	ss
12,7	0,949	026	224	24	135	139	22,75	0,199		24	375	375	st
13,90	0,980							0,200					

S	Normale Linien		Überstruktur		sin φ : $\sqrt{\sum h_i^2}$		Intensität			
	h_1	h_2 h_3	$\sum h_i^2$	h_1 h_2 h_3	$\sum h_i^2$	K_a	K_β	n	Ber.	Beob.
cm										
10,74	113		11			0,263		24	818	s st
11,58	222		12			0,2625		8	250	st
12,62				023	13	0,263		24	61	s
12,81	004 β		16				0,2385	6	36	s
14,05				123	14	0,263		48	112	st
Kupferstrahlung										
7,91	113		11			0,210		24	818	s st
8,38	222		12			0,2095		8	250	st
				023	13	0,210		24	61	m
8,80	004 β		16			0,2095	0,1895	6	36	m
9,21				123	14	0,2095		48	112	m
9,89	133 β		19			0,2095	0,189	24	119	m
10,12	004		16			0,2095		6	142	st
10,30	024 β		20			0,2095	0,1895	24	113	m
10,64				014	17	0,2095		24	47	m
				114	18	0,2085		24	66	st
11,14				033		0,210		6	474	s st
17,77	183		19			0,210	0,1895	24	94	s
12,04	224 β		24			0,210		24	450	s st
12,42	024		20			0,2085		48	77	st
13,08				124	21	0,2115		24	36	st
				233	22			24	111	st
14,12			27				0,191	8		

Komponenten entsprechen, die im 25 At.-Proz.-Gebiet bei Pd-Cu und Au-Cu gefunden wurde (vgl. Fig. 3). Von den übrigen Legierungen mit niedrigem Widerstand haben wir die meisten auch röntgenographisch untersucht und die dieser Überstruktur entsprechenden Linien gefunden. Die über 26 Proz. gelegenen weisen im Röntgenbild keine Überstrukturlinien auf, wie auch das Widerstandsdiagramm erwarten läßt. Die Überstrukturlinien sind sonst innerhalb dieses Gebietes auffallend stark, auch bei Legierungen weit von der Spitze, wie z. B. aus der reproduzierten Aufnahme für 16,7 Proz. zu ersehen ist. Ferner erhalten die Legierungen leicht die geordnete Atomverteilung, und da alle die erhaltenen Punkte sich auf dieselbe Kurve sehr gut einordnen, ist anzunehmen, daß diese Kurve die bestmögliche Ordnung und die kleinsten zu erhaltenden Widerstände angibt.

Die Untersuchung ist im Phys. Institut der Techn. Hochschule Stockholm ausgeführt worden. Es ist uns eine angenehme Pflicht, dem Direktor des Instituts, Prof. G. Borelius, unseren herzlichen Dank auszusprechen, daß er uns zu dieser interessanten Untersuchung angeregt, und für die wertbaren Dienste und Ratschläge, beim Überkommen der experimentellen und theoretischen Schwierigkeiten, die er uns geleistet hat.

Stockholm, Physikal. Institut der Techn. Hochschule, den 24. Dezember 1926.

Nachtrag zur Korrektur

Nachdem diese Arbeit abgesandt worden war, ist das Dezemberheft der Z. anorg. u. allg. Chemie, mit einer Untersuchung von G. Tammann und O. Heusler¹⁾ hierher gekommen, die u. a. über die Umwandlung der Au-Cu-Mischkristalle mit 25 At.-Proz. Au handelt. Die Verfasser halten unsere Annahme, daß diese Umwandlung immer mit Herstellung bzw. Zerstörung der regelmäßigen Verteilung der Atome verbunden sei, wegen des schnellen Verlaufs des Umwand-

1) Z. anorg. u. allg. Chemie 158. S. 355. 1926.

lungsprozesses, als sehr unwahrscheinlich. Wir hatten schon früher bei präliminären Untersuchungen über den Widerstand als Funktion von der Temperatur im Umwandlungsgebiet (über die später berichtet werden wird) eine Stütze unserer Auffassung gefunden. Bei abnehmender Temperatur tritt eine kräftige Widerstandsverminderung, bei steigender eine Vermehrung auf. Die erhaltenen Kurven verlaufen ähnlich wie die von T. und H. für die Wärmemenge Q wiedergegebene Kurve. Diese Tatsache, in Verbindung mit den allgemeinen Erfahrungen über den Zusammenhang zwischen elektrischem Widerstand und Atomverteilung, macht schon unsere Annahme durchaus wahrscheinlich. Wir haben jetzt auch nach dem Vorschlag der zit. Verfasser folgenden Versuch gemacht. Zwei Proben der Reihe Au—Cu mit 25 bzw. 27 At.-Proz. Au, die niedrigen Widerstand und, wie aus den Röntgenogrammen ersichtlich war, regelmäßige Atomverteilung besaßen, wurden in evakuierten Quarzröhren eine Viertelstunde bei 400° C gehalten und darauf in kaltes Wasser eingetaucht. Die Röntgenogramme dieser Proben zeigten dann keine Spur von den Überstrukturlinien und der elektrische Widerstand war in gewöhnlicher Weise erhöht. Für die gleichartige Umwandlung um 50 At.-Proz. Au, wo das Ordnen der Komponenten nicht nur Überstrukturlinien, sondern auch eine kleine Deformierung des kubischen Gitters hervorruft, haben wir als Beispiel eine Probe mit 45 At.-Proz. Au in derselben Weise behandelt. Nach Tempern und Abschrecken bei 420° C war das Gitter rein kubisch und zwar ohne Spur von Überstrukturlinien.

Wir finden es daher keinem Zweifel unterliegend, daß die Umwandlungen im festen Zustand der Reihe Au—Cu eben darin ihren Grund haben, daß bei steigender Temperatur die regelmäßige Verteilung in die statistisch ungeordnete übergeht und umgekehrt bei Temperaturabnahme.

(Eingegangen 27. Dezember 1926)

2. Über die Wärmeleitfähigkeit der Gase; von Sophus Weber

§ 1. In einer Reihe von Untersuchungen¹⁾ habe ich früher theoretisch nachgewiesen, daß es möglich ist, die Schleiermachersche Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit der Gase so zu verbessern, daß Präzisionsbestimmungen für diese physikalischen Konstanten erreicht werden können.

Es hat sich damals herausgestellt, daß man es hauptsächlich mit drei bedeutenden Fehlerquellen zu tun hat: 1. die Wärmeableitung durch die Endflächen des Drahtes; 2. der Temperatursprung und 3. der Einfluß der Konvektion. — Die anderen Fehlerquellen, z. B. die Strahlung, die Ableitung durch die Elektroden, die Korrektion wegen der Dicke der Glaswand usw. sind alle klein und leicht zu berechnen oder experimentell zu eliminieren.²⁾

Um die Wärmeableitung durch die Endflächen zu eliminieren kann man entweder die Methode der Elektroden, wie von Schleiermacher³⁾ angegeben, oder die Methode von Goldschmidt⁴⁾ verwenden. Wie bekannt eliminiert Goldschmidt diese Ableitung durch gleichzeitige Verwendung von einem langen und einem kurzen Draht.

Möglich ist es auch, wie wir später sehen werden, sehr genau für diese Ableitung rein rechnerisch zu korrigieren.

Um in der Methode von Schleiermacher die richtige Stelle für die Elektroden oder in der Methode Goldschmidts die richtige Länge der zwei Drähte zu bestimmen, habe ich früher die Temperaturverteilung längs des geheizten Drahtes⁵⁾

1) Sophus Weber, Ann. d. Phys. 54. S. 165—182, 325—357, 437—463, 481—502. 1917.

2) H Busch, Ann. d. Phys. 80. S. 1. 1926.

3) A. Schleiermacher, W. A. 34. S. 623. 1888.

4) R. Goldschmidt, Phys. Ztschr. S. 418. 1911.

5) Diese Berechnungen sind erst von Martin Knudsen (Ann. d. Phys. 34. S. 624. 1911) gemacht und haben, wie bekannt, zu einer

und die Formel für die Wärmemengen, welche in dem stationären Zustande pro Zeiteinheit durch die Endflächen und durch die Oberfläche des Drahtes abgeleitet werden, berechnet.

Die Korrektur wegen des Temperatursprunges ist für jedes Gas sehr einfach experimentell zu bestimmen. Bei meinen früheren Messungen habe ich für alle untersuchten Gase den Temperatursprung bestimmt und nachgewiesen, daß dieser in der von Smoluchowski¹⁾ angegebenen Weise von dem Knudsensche Akkommodationskoeffizient abhängt; in der untenstehenden Tabelle ist eine Zusammenstellung dieser Resultate gegeben.

In der ersten Kolonne steht der von mir experimentell bestimmte Wert des Verhältnisses γ/λ , wo λ die mittlere freie Weglänge in Zentimeter nach O. E. Meyer bezeichnet, während γ durch die Formel von Kundt und Warburg²⁾ für den Temperatursprung definiert ist, also:

$$\Delta\theta = -\gamma \cdot \frac{d\theta}{dn}.$$

Methode zur Bestimmung des Verhältnisses von Wärmeleitung zur Elektrizitätsleitung der Metalle geführt (Sophus Weber, Ann. d. Phys. 54. S. 165. 1917).

Über diese Methode schreibt W. Meißner (Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 17. S. 235. 1920) wie folgt: „Sophus Weber hat eine von Martin Knudsen angegebene Methode zur Bestimmung des Leitverhältnisses λ/κ theoretisch und praktisch ausgebildet, die ganz auf die Kohlrausch-Diesselhorstsche Methode hinausläuft usw.“

Ich möchte hierzu bemerken, daß dieses nach meiner Auffassung weder in theoretischer noch in praktischer Hinsicht ganz richtig ist. — Bei der Methode von Kohlrausch und Diesselhorst werden einzelne Temperaturen des geheizten Stabes gemessen, während wir eine mittlere Temperatur und eine Wärmemenge messen. — Viel wichtiger ist es aber, daß man, um die Methode von Kohlrausch und Diesselhorst zu verwenden, lange und dicke Stäbe zur Disposition haben muß, während wir mit sehr dünnen Drähten arbeiten können, so daß unsere Methode auch in Fällen anwendbar ist, bei denen eine Bestimmung nach der Methode von Kohlrausch und Diesselhorst unmöglich ist, z. B. wenn sehr wenig von dem Metall disponibel ist, für Messungen bei sehr niedrigen Temperaturen, für Einkristalldrähte usw.

1) M. v. Smoluchowski, R. v. Smolan, Sitz.-Ber. d. K. A. d. W. in Wien 107. IIa. S. 304. 1898; 108. IIa. S. 5. 1899.

2) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 156. S. 177. 1875.

In der zweiten Kolonne steht das Produkt $p \cdot \lambda$ bei 0°C , wo λ nach O. E. Meyer ist bestimmt durch:

$$p \cdot \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{1}{0,3097} \cdot \frac{\eta_0}{\sqrt{\varrho_0}} \left(\frac{T}{273,1} \right)^{1+m},$$

wo m ist bestimmt durch:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left(\frac{T}{273,1} \right)^{1+m};$$

p , der Druck des Gases, ist gemessen in Bar. und λ in Zentimeter.

In der dritten Kolonne findet man den Knudsenschen Akkommodationskoeffizient, a , gegen blankes, glattes Platin¹⁾ und in der vierten Kolonne den Wert von γ/λ , berechnet aus der Formel von Smoluchowski:

$$\gamma = \frac{15}{2\pi} \cdot \frac{2-a}{2a} \cdot \lambda_1 = 2,32 \cdot \frac{2-a}{2a} \cdot \lambda.$$

In dieser Formel ist λ_1 die freie mittlere Weglänge nach Clausius, also definiert durch:

$$\lambda_1 = \frac{\pi \sqrt{2\pi}}{4} \cdot \frac{\eta}{p \sqrt{\varrho}},$$

und λ die obengenannte Weglänge nach O. E. Meyer:

	$\left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)_{\text{beob.}}$	$p \cdot \lambda_{0^\circ \text{C}}$	a	$\left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)_{\text{ber.}}$
Argon	1,83	10,04	0,852	1,74
Neon	2,39	18,93	0,653	2,40
Helium	5,25	28,31	0,338	5,70
Wasserstoff	7,26	18,25	0,278	7,20
Sauerstoff	1,70	10,25	0,80	1,74
Atm. Luft	1,83	9,98	0,80	1,74
Kohlensäure	1,73	6,31	0,807	1,72
Methan	1,64	7,75	[0,83]	[1,64]

Wie man hieraus sieht, ist die Übereinstimmung, Helium ausgenommen, befriedigend.

Die Korrektur für den Einfluß der Konvektionsströmungen ist die schwierigste Korrektur in der Schleiermacherschen Methode, weil die Größe hiervon nicht allein von den Eigen-

1) Martin Knudsen, Ann. d. Phys. 46. S. 641, 1915.

schaften der Gase, sondern auch von den Abmessungen und der Form des Apparates abhängt.

Bei meinen früheren Untersuchungen ist es mir gelungen den Einfluß der Konvektion dadurch zu beseitigen, daß der Draht genau vertikal aufgestellt war und somit parallel mit der Richtung der laminaren Konvektionsströmungen; wählt man außerdem die richtige Stelle für die unterste Elektrode, so wird erreicht, daß der Einfluß der Konvektion praktisch eliminiert wird, was aus den Tabellen für die verschiedenen Gase hervorgeht, wenn man beachtet, daß die Wärmeabgabe, korrigiert für den Temperatursprung und reduziert auf 0°C und auf den Temperaturunterschied, $\Delta t = 1^{\circ}$, unabhängig von dem Druck ist.

Außerdem habe ich dies auch nachgewiesen mit meinem Apparat III mit freihängendem Draht durch mehrere Elektroden anzubringen. — Hierdurch habe ich also die Wärmeabgabe durch Wärmeleitung und durch Konvektion systematisch voneinander getrennt.¹⁾

Daß dieses bei der vertikalen Aufstellung zu erreichen ist, ist auch sehr leicht in der folgenden Weise einzusehen: Wenn wir voraussetzen, daß der Draht genau vertikal ist und somit parallel mit der Richtung der Konvektionsströmungen, und daß die Geschwindigkeit dieser sehr klein ist, was leicht durch einen kleinen Temperaturunterschied zwischen dem geheizten Draht und dem Außenrohr erreicht werden kann, so können wir in diesem Falle sicher annehmen, daß die vertikalen Konvektionsströmungen laminar sind. In diesem Falle sind also keine Querströmungen vorhanden. Es ist nun einleuchtend, daß der Wärmeverlust, herrührend von den Konvektionsströmungen, hauptsächlich an dem untersten Teil des Drahtes liegt, und daß es dadurch möglich wird den Einfluß von diesen zu eliminieren durch die richtige Wahl der Stelle für die unterste Elektrode; wäre der Draht nämlich unendlich lang, so folgt aus der Lorenzschen Theorie²⁾ für die Abkühlung

1) Es ist also nicht ganz richtig, wenn H. Gregory u. C. T. Archer (Proc. Roy. Soc. 110. S. 99. 1926) schreiben, daß ich *angenommen* habe, daß die Konvektion durch meine vertikale Aufstellung eliminiert wurde, und daß niemand versucht hat die Wärmeleitung von der Konvektion zu trennen.

2) L. Lorenz, W. A. 13. S. 582. 1881.

einer vertikalen Platte, welcher Fall ganz analog mit dem unserigen ist, daß der Wärmeverlust wegen der Konvektionsströmung für den oberen Teil des Drahtes ganz verschwindend wird, weil die Temperatur der emporsteigenden Luft in konstantem Abstand von dem Draht zum Schluß konstant wird und genau dieselbe, als ob keine Strömung vorhanden wäre.¹⁾

Wird die Konvektionsströmung aber stärker, z. B. durch größeren Druck, Temperaturunterschied oder durch größeren Durchmesser des äußeren Rohres, so ist es möglich, daß Querströmungen entstehen, wodurch die laminare Strömung zerstört wird; zum Schluß kann man dann den turbulenten Zustand erreichen. — Dies zeigt sich natürlich sofort dadurch, daß der Wärmeverlust nicht von dem Druck unabhängig ist, sondern mit diesem wächst — im Anfang langsam, aber später, wenn die laminare Strömung ganz instabil wird, sehr schnell. — Dies zeigt sich in den Versuchen dadurch, daß das Galvanometer in der Brücke²⁾ oder im Potentiometerkreis unruhig wird, wie ich es früher für Kohlensäure bei großem Druck gefunden habe. Bei meinen früheren Messungen mit diesem Gase habe ich den hier umschriebenen Verlauf vom Einfluß der Konvektion sehr genau experimentell festgestellt.

Wenn man in der Methode Schleiermachers diese turbulenten Strömungen vermeiden und die Geschwindigkeit der laminaren Strömung möglichst klein halten will, muß man mit kleinen Temperaturdifferenzen arbeiten und den Durchmesser des Außenrohres so klein wie möglich wählen, indem man gleichzeitig dafür sorgt, daß der Übergang zu dem turbulenten Zustand nicht durch Unebenheiten in den Glasapparaten beschleunigt wird, so daß ich immer in meinen Versuchen den geheizten Draht oben und unten mit Glimmerplatten ab-

1) Vgl. a. a. O. Ann. d. Phys. 54. S. 342. 1917.

2) H. Gregory u. C. T. Archer, a. a. O., schreiben in ihrer Abhandlung über die Verwendung der Wheatstoneschen Brücke so, als ob niemand früher diese Methode verwendet hätte, und daß sie die ersten sind, die die Brückenmethode verwenden. — Soweit ich weiß, hat sowohl R. Goldschmidt wie auch A. Eucken diese verwendet und später auch E. Schneider. Nur ich habe die Potentiometermethode benutzt, weil diese für meine Untersuchung am zweckmäßigsten war.

geschlossen habe, wodurch der Strömungszustand so regelmäßig wie möglich wird.¹⁾

Nach dieser Auseinandersetzung über den Einfluß der bekannten Fehlerquellen ist es nicht wahrscheinlich, daß man in der Methode Schleiermachers einen großen Einfluß des Durchmessers des verwendeten Heizdrahtes finden wird²⁾; wohl ist aber ein großer Einfluß des Durchmessers der Außenröhre zu erwarten, wenn dieser eine bestimmte Größe überschreitet.³⁾ In dieser Richtung wäre vielleicht die Erklärung zu suchen für den Diskrepanz zwischen den von Ernst Schneider und mir gefundenen Werten für die Wärmeleitfähigkeit von trockener, kohlensäurefreier, atmosphärischer Luft. — In Übereinstimmung mit dieser Erklärung ist dann auch der viel kleinere Unterschied zwischen unseren Werten für Wasserstoff.

Es wäre sehr interessant, wenn die Untersuchungen von Schneider mit Röhren von verschiedenem Durchmesser wiederholt wurden, wenn möglich mit einer direkten Bestimmung der Temperatur der Innenseite des Glasrohres.

Zum Schluß möchte ich noch darauf hinweisen, daß es nach meiner Auffassung auch sehr wertvoll wäre, wenn man Präzisionsmessungen der Wärmeleitfähigkeit der Gase nach einer ganz anderen Methode unternehmen könnte; es würde hierfür wahrscheinlich die Christiansensche Dreiplattenmethode⁴⁾ in Betracht kommen, weil es nicht schwierig sein würde, diese Methode mit Hilfe des Schutzringprinzips in eine

1) H. Gregory u. C. T. Archer haben in einer späteren Arbeit (Phil. Mag. (7) 1. S. 594. 1926) einige von ihren Messungen wiederholt und diesmal mit vertikaler Aufstellung. Sie teilen u. a. mit, daß es besser sei, die Gase unten als oben in den Apparat einzuführen. — Wenn sie hierdurch einen Unterschied bekommen haben, bin ich überzeugt, daß sie diesen sehr leicht eliminieren können, wenn sie die Meßdrähte mit Glimmerplättchen abgrenzen. — Hierdurch wird die Ableitung durch die Enden des Drahtes wohldefiniert, und die Störungen durch Änderung des Druckes ganz unbedeutend.

2) Ernst Schneider, Ann. d. Phys. 79. S. 177. 1926.

3) H. Gregory u. C. T. Archer, Proc. Roy. Soc. 110. S. 91. 1926. In dieser Arbeit ist die Abhängigkeit von dem Durchmesser des äußeren Rohres für horizontale Drähte sehr schön nachgewiesen — nur schade, daß diese Aufstellung nicht vertikal war.

4) C. Christiansen, W. A. 14. S. 23. 1881; 19. S. 282. 1883.

Präzisionsmethode abzuändern und hierdurch Bestimmungen erhalten, die gar nicht durch die Konvektion beeinflusst werden.

§ 2. Nach dieser Einleitung werde ich eine einfache Methode beschreiben, welche durch Anwendung eines langen und eines kurzen Drahtes erlaubt, gleichzeitig die Wärmeleitfähigkeit der Gase zu bestimmen und untersuchen, ob der gefundene Wert durch Konvektionsströmungen beeinflusst ist.

Diese Methode gibt also eine systematische Trennung der Wärmeverluste durch Leitung und Konvektion.

Für diese Untersuchung müssen die Drähte, wie wir weiter unten sehen werden, genau vertikal in der Achse von zylindrischen Röhren mit demselben Durchmesser und Glasdicke ausgespannt werden (Fig. 1).

Wir betrachten einen vertikalen zylindrischen Draht, welcher durch einen elektrischen Strom, J , erhitzt werden kann; in dem stationären Zustande hängt die Temperaturverteilung längs des Drahtes von der Temperatur der Umgebung und der Endflächen ab; diese sei T_0 . Wir können dann leicht die Wärmemengen, welche im stationären Zustande durch die Oberfläche und die Endflächen pro Zeiteinheit abgeleitet werden, berechnen.

Es sei:

T die Temperatur des Drahtes,

A der Querschnitt des Drahtes,

O die Oberfläche des Drahtes,

l die Länge des Drahtes,

κ die Wärmeleitfähigkeit des Drahtes, welche bei kleinen Temperaturdifferenzen als unabhängig von der Temperatur angenommen wird,

σ die Strahlungskonstante, wenn die Ausstrahlung proportional dem Temperaturunterschied gesetzt wird,

W_0 der elektrische Widerstand bei T_0 ,

α der Temperaturkoeffizient von W_0 zwischen T und T_0 ,

J die Stromstärke in Ampere,

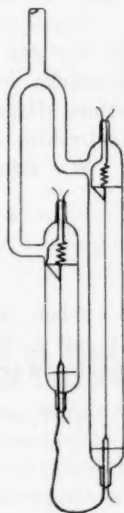


Fig. 1

- s die äußere Wärmeleitfähigkeit, d. h. die Wärmemenge, die pro Grad und Sekunde von 1 cm^2 der Oberfläche durch Wärmeleitung abgeleitet wird,
 $\varrho(z)$ die Konvektionsleitfähigkeit für einen vertikalen Draht, d. h. die Wärmemenge, die pro Grad und Sekunde von 1 cm^2 der Oberfläche durch Konvektion abgeleitet wird.

Diese letzte Größe, $\varrho(z)$, ist, wie wir später sehen werden, unabhängig von der Länge des Drahtes, wenn dieser horizontal ist; dem gegenüber eine Funktion von der Länge, wenn der Draht vertikal ist.

Durch eine einfache Rechnung kann man leicht beweisen, daß wir den Temperaturunterschied zwischen der Achse und Oberfläche des Drahtes vernachlässigen können, und also annehmen dürfen, daß die Temperatur in demselben Querschnitt des Drahtes dieselbe ist.

Wir erhalten dann, wenn der Zustand stationär ist:

$$A \cdot x \cdot \frac{d^2(T - T_0)}{dz^2} - \frac{O}{l} (s + \sigma + \varrho(z)) (T - T_0) + \frac{W_0 \cdot J^2}{4,188} \cdot \frac{1}{l} (1 + \alpha(T - T_0)) = 0.$$

Sehen wir in der Integration ab von der Variation von $\varrho(z)$ mit z , so erhalten wir, wenn die gesamte im Draht entwickelte Wärmemenge gleich $Q \cdot T_1$ gesetzt wird:

$$Q \cdot T_1 = \frac{1}{4,188} \cdot W \cdot J^2 = \frac{1}{4,188} \cdot W_0 \cdot J^2 (1 + \alpha T_1),$$

wo

$$T_1 = \frac{1}{l} \int_0^l (T - T_0) dz.$$

Indem wir setzen:

$$a^2 = \frac{1}{x \cdot A \cdot l} \left\{ O (s + \sigma + \varrho(l)) - \frac{\alpha}{4,188} \cdot W_0 \cdot J^2 \right\}$$

$$\text{und } b = \frac{W_0 \cdot J^2}{4,188} \cdot \frac{1}{x \cdot A \cdot l},$$

erhalten wir durch Integration der Differentialgleichung:

$$T - T_0 = \frac{b}{a^2} \left\{ 1 - \frac{\cos a \cdot x}{\cos a \cdot \frac{l}{2}} \right\}$$

und
$$T_1 = \frac{b}{a^2} \left\{ 1 - \frac{2}{a \cdot l} \operatorname{Tg} \frac{a \cdot l}{2} \right\},$$

wo $\varrho(l)$ einen Mittelwert für die Länge l und Cos und Tg bzw. den hyperbolischen Cosinus und Tangens bedeutet.

Wir setzen:

$$x = \frac{a \cdot l}{2} = \sqrt{\frac{l}{4 A \pi} \left\{ O(s + \sigma + \varrho(l)) - \alpha \cdot \frac{W_0 \cdot J^2}{4,188} \right\}},$$

$$\frac{\alpha}{4,188} \cdot W_0 \cdot J^2 = m^2 \cdot c \quad \text{und} \quad c = \frac{4 A \pi}{l}.$$

Hieraus erhalten wir die folgende Gleichung:

$$c(x^2 + m^2) = O[s + \sigma + \varrho(l)].$$

Wir bezeichnen:

die im Drahte entwickelte Wärmemenge mit $Q' = Q \cdot T_1$,
 die durch die Endflächen abgeleitete Menge mit $Q_2' = Q_2 \cdot T_1$,
 die durch die Oberfläche abgeleitete Menge mit $Q_1' = Q_1 \cdot T_1$,
 und erhalten dann die folgenden drei Formeln:

$$Q_1 = c(x^2 + m^2) = O(s + \sigma + \varrho(l)),$$

$$Q_2 = c \frac{x \operatorname{Tg} x}{1 - \frac{1}{x} \operatorname{Tg} x},$$

$$Q = c \left(m^2 + \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x} \operatorname{Tg} x} \right).$$

Wir sehen aus den Formeln, daß es einfach ist, wenn die mittlere Temperatur des Drahtes, T_1 , und die im Drahte entwickelte Wärmemenge, $Q \cdot T_1$, gemessen werden, erst x und dadurch Q_1 zu berechnen. Es ist hiernach einleuchtend, daß die Bestimmung von Q_1 aus Q nur bedeutet, daß Q rechnerisch für die Wärmeableitung durch die Endflächen korrigiert wird, während diese Korrektur in den Meßmethoden von Schleiermacher und Goldschmidt durch die gewählte Versuchsaufstellung eliminiert wird.

Hieraus erhalten wir, wenn der Durchmesser des geheizten Drahtes $2r$ genannt wird, den Wärmeverlust pro Zentimeter, M , für den langen Draht:

$$M = \frac{Q_1}{l} = 2 \pi r [s + \sigma + \varrho(l)],$$

wo $\varrho(l)$ den Mittelwert für den Draht mit der Länge, l , bezeichnet.

Betrachten wir nun einen kürzeren Draht mit demselben Durchmesser, $2r$, und mit der Länge, k , welcher unter genau denselben Umständen mit demselben Strom, J , geheizt wird, so erhalten wir in diesem Falle für den Wärmeverlust pro Zentimeter, N , den analogen Ausdruck:

$$N = \frac{q_1}{k} = 2\pi r[s + \sigma + \varrho(k)].$$

Aus diesen Ausdrücken für M und N sehen wir, daß es nur dann möglich ist, die Wärmeleitung und die Konvektion voneinander zu trennen, wenn $\varrho(l)$ und $\varrho(k)$ verschieden sind.

Für zwei Drähte, welche *horizontal* ausgespannt sind, ist es einleuchtend, daß die Konvektionsströmungen in jedem vertikalen Querschnitt dieselbe werden, woraus folgt, daß die Wärmeabgabe durch Konvektion proportional mit der Länge des Drahtes wird, und also ϱ unabhängig von der Länge; in diesem Falle ist also $\varrho(l) = \varrho(k)$, und ist es unmöglich festzustellen, ob die Wärmeleitfähigkeit, s , durch Konvektion beeinflusst ist.

Sind aber die zwei Drähte beide *vertikal*, wird die Lage eine andere; in diesem Falle ist es leicht einzusehen, daß die Konvektionsströmungen, solange sie laminar bleiben, im Verhältnis den kurzen Draht viel stärker beeinflussen als den langen Draht, weil der größte Wärmeverlust durch die Konvektion, wie bereits S. 482 auseinandergesetzt, am unteren Teil des Drahtes liegt.

Diesen Fall hat L. Lorenz¹⁾ theoretisch für eine vertikale Platte mit der Höhe, H , untersucht; er betrachtet die Abkühlung einer vertikalen Platte durch laminare Konvektionsströmungen, ausgehend von der Voraussetzung, daß die Höhe der Platte nicht zu gering ist. Das Resultat seiner Berechnung, die nur angenähert ist, ergibt, daß der Wärmeverlust per Quadratcentimeter und pro Sekunde, V :

$$V = N \cdot \sqrt[4]{\frac{C \cdot g \cdot K^2}{\eta \cdot T}} \cdot \sqrt{\varrho_0} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{H}} \cdot \theta_0^{\frac{5}{4}} \text{ ist,}$$

wo N ein Zahlenfaktor ist, während C , K , η und ϱ_0 bzw. die spezifische Wärme, die Wärmeleitfähigkeit, die innere Reibung

1) L. Lorenz, a. a. O.

und das spezifische Gewicht des Gases darstellen. θ_0 ist der Temperaturunterschied mit der Umgebung.

Durch eine Dimensionsbetrachtung sehen wir leicht, daß wir in unserem Falle für einen vertikalen Draht mit Länge, l , mit hinreichender Genauigkeit schreiben können:

$$\varrho(l) = \text{const.} \cdot \varphi(\alpha \cdot r \cdot \theta_0) \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{l}},$$

wo p der Druck des Gases ist.

Betrachten wir also unsere zwei geheizten Drähte, welche nur durch die Längen l und k verschieden sind, so sehen wir hieraus, daß wir, wenn Konvektionsströmungen vorhanden sind, einen Unterschied zwischen M und N finden müssen, und daß N größer als M sein muß, wenn l größer ist als k .

Nehmen wir z. B. an, daß der Wert von M durch Konvektion beeinflusst ist, und hierdurch 2 Proz. zu groß gefunden ist, so müssen wir, wenn l viermal so lang ist als k , erwarten, daß N durch den Einfluß von der Konvektion etwa 3,5 Proz. zu groß gefunden wird, also ein Unterschied zwischen M und N von 1,5 Proz., welches bei diesen Messungen sehr leicht zu konstatieren wäre.¹⁾

Sind keine Konvektionsströmungen vorhanden, so ist $\varrho(l) = \varrho(k) = 0$ und $M = N$.

Kennen wir also die Meßgenauigkeit, so ist es hierdurch leicht festzustellen, in welchem Maße der Wert für die Wärmeleitfähigkeit durch Konvektion beeinflusst sein kann.

Findet man experimentell N größer als M , so muß nach der obenstehenden Formel die prozentuale Abweichung zwischen N und M , wenn diese von der Konvektion herrührt, mit dem Druck, p , wachsen, während ein Unterschied zwischen M und N , herrührend von z. B. systematischen Fehlern in den Apparatenkonstanten, im ganzen Druckgebiet konstant sein muß.

1) Eine mathematische Berechnung des Einflusses der laminaren Konvektionsströmungen auf die Wärmeabgabe eines vertikalen Drahtes in Analogie mit der Berechnung von Lorenz für eine vertikale Platte ist möglich, bietet aber große mathematische Schwierigkeiten. — In verschiedenen Abhandlungen habe ich früher Beiträge zur Lösung dieses Problems gegeben. (Sophus Weber, Det. Kgl. Danske Vid. Selskabs Math.-Fys. Meddelelser III. H. 3. 1920; III. H. 18. 1921 und III. H. 19. 1921).

Bei den experimentellen Bestimmungen der Wärmeleitfähigkeit der verschiedenen Gase habe ich zwei Doppelapparate, Fig. 1, welche nur in einigen von den Abmessungen etwas verschieden waren, verwendet.

Die dünnen Platinmeßdrähte, deren totaler Wärmeverlust gemessen wurde, waren in der Achse der Glasröhre mittels schwacher Platinfedern ausgespannt und oben und unten an dicke Platindrähte angelötet, an welchen für die elektrische Spannungsmessung wieder dünne Drähte angelötet waren.

Die Apparate sind, wie aus der Figur ersichtlich, bei den Übergangsstellen der Meßdrähte mit runden Glimmerscheibchen ausgestattet; hierdurch werden nicht allein in einfacher Weise die Platindrähte gut zentriert, sondern diese Glimmerscheibchen dienen vor allem dazu, eventuelle Konvektionsströmungen so regelmäßig wie möglich bzw. laminar zu halten. Außerdem erreicht man mit dem Einsetzen dieser Plättchen, daß die Zuleitungsdrähte oben und unten nicht mit dem warmen Gase in Berührung kommen, wodurch diese Zuleitungsdrähte die Temperatur der Umgebung bekommen; hierdurch wird die Wärmeableitung durch die Enden der Drähte wohldefiniert und konstant.¹⁾

In diesen Apparaten sind natürlich die Meßdrähte der Hauptbestandteil, weil diese Drähte um eine große Genauigkeit zu erreichen, eine wohldefinierte Oberfläche haben müssen.

Der Meßdraht wurde auf folgende Weise hergestellt und untersucht: Ein dünner Platindraht aus sehr reinem Platin wurde durch einen Diamanten gezogen, bis der Durchmesser etwa $50\ \mu$ war. Besonderes Gewicht wurde darauf gelegt, daß das Loch in dem Diamanten genau kreisrund war, und wurde dieses mikroskopisch festgestellt. Sicherheitshalber wurde auch die Form des Querschnitts des Drahtes metallmikroskopisch untersucht, indem der Platindraht elektrolytisch verkupfert wurde, bis der Querschnitt so groß war, daß ein Metallschliff

1) Wenn die Glimmerplatten fortgelassen werden, wird die Störung des Gleichgewichtszustandes viel größer, wenn z. B. der Druck geändert wird; dies ist wahrscheinlich auch die Erklärung des von Gregory und Archer gefundenen Unterschiedes (Phil. Mag., a. a. O., S. 595), wenn sie in ihrer später verwendeten vertikalen Aufstellung die Gase oben oder unten in den Apparat einlassen.

gemacht werden könnte. — Es zeigte sich hierdurch, daß die Abweichung des Querschnittes von der Kreisform unterhalb der Meßgenauigkeit lag. — Der Durchmesser wurde durch Wägung bestimmt und mit einem Präzisionsmikrometer kontrolliert.¹⁾ Der Durchmesser war 0,005246 cm. Die Längen der Platindrähte wurden mit einem Präzisionskathetometer gemessen und mit den elektrischen Widerständen der Drähte bei 0° C kontrolliert; hierfür wurde durch absonderliche Messungen der Widerstand von einem Meter des Drahtes bei 0° C und der Temperaturkoeffizient von dem Widerstand zwischen 0 und 100° C, α_{0-100} , bestimmt.

Mit Hilfe des Kathetometers wurde der Apparat so aufgestellt, daß die Drähte parallel und genau vertikal waren, und hiernach mit den nötigen Manometer, Trockenapparaten, Pumpen und anderen Hilfsapparaten verbunden, genau auf derselben Weise, wie ich es in meinen früheren Untersuchungen umschrieben habe. Während der Messungen wurde der Doppelapparat mit einem Dewargefäß, gefüllt mit einem Brei von fein geschabtem Eis und destilliertem Wasser, umgeben.

Bei der elektrischen Messung wurden die Apparate und ein Normalwiderstand hintereinander geschaltet. Der letztere war in Petroleum gesenkt und betrug 10 Ω (eventuell 1 Ω). Wenn der Zustand stationär geworden war, wurde der Spannungsunterschied zwischen den langen und kurzen Drähten bzw. E_l und E_k und der Spannungsunterschied E_{10} , zwischen den Enden des Normalwiderstandes, gemessen. — Alle Spannungen wurden gemessen mit dem thermokraftfreien Kompensationsapparat von Wolff, und eventuelle Thermokräfte außer dem Kompensationsapparat wurden durch gleichzeitige Kommutierung des Stromes in dem Meßapparat und in dem Kompensationsapparat eliminiert.

Aus den elektrischen Widerständen, bzw. $W = \frac{E_l}{J}$ und $w = \frac{E_k}{J}$, wo $J = \frac{1}{10} E_{10}$, können, nachdem die Widerstände

1) Eine Ausmessung des Metallschliffs mit Hilfe eines Zeichenapparates nach Abbe gab einen Wert für den Durchmesser, welcher 1 Proz. größer war als der durch Wägung gefundene. — Die Erklärung dieser Abweichung wurde damals in den Beugungserscheinungen des Mikroskops gesucht.

bei 0° C und der Temperaturkoeffizient mittels besonderer Messungen bestimmt worden sind, die mittleren Temperaturen der geheizten Platindrähte, bzw. t_i und t_k , berechnet werden.

Hieraus können wir nun die Werte für Q und q leicht berechnen und finden

$$Q = 0,2388 \cdot J \cdot E_i \cdot \frac{1}{t_i} \quad \text{und} \quad q = 0,2388 \cdot J \cdot E_k \cdot \frac{1}{t_k}.$$

Wäre die Wärmeableitung durch die Endflächen der Drähte zu vernachlässigen, so müßten die Werte für den Wärmeverlust pro cm und Grad Temperaturdifferenz, bzw. Q/l und q/k , gleich groß sein, wenn keine Konvektion vorhanden wäre. — Es zeigt sich aber, daß dies der Fall nicht ist — q/k ist stets größer als Q/l — so daß wir für diesen Wärmeverlust eine Korrektion anbringen müssen, um $M = \frac{Q_1}{l}$ und

$$N = \frac{q_1}{k} \text{ zu berechnen.}$$

Bei meinen Versuchen ist diese Korrektion sehr einfach, weil $\text{Tg } x = 1$ gesetzt werden kann; in diesem Falle werden die oben abgeleiteten Formeln:

$$\frac{Q}{c} = m^2 + \frac{x^3}{x-1}, \quad \frac{Q_1}{c} = m^2 + x^2 \quad \text{und} \quad \frac{Q_2}{c} = \frac{x^3}{x-1}.$$

Mittels dieser Formeln finden wir leicht, wenn Q und q für Q eingesetzt werden, die Werte für Q_1 und q_1 , und hieraus M und N .

Betrachten wir nun den Längenunterschied der zwei Platindrähte, so können wir mit Goldschmidt annehmen, daß der Wärmeverlust für die Längendifferenz der zwei Drähte nicht durch die Ableitung durch die Drahtenden beeinflusst ist. — Es scheint mir aber nicht ohne Interesse festzustellen, welches die theoretischen Bedingungen für die richtige Verwendung der Goldschmidtschen Methode sind, und zu sehen, ob diese für meine Apparate erfüllt sind.

Die theoretische Bedingung hierfür können wir leicht aus unseren Formeln ableiten, wenn wir feststellen, in welcher Weise die Wärmeableitung durch die Endflächen von der Länge des Drahtes abhängt.

Die Ableitung durch die Endflächen ist bestimmt durch:

$$Q_2 \cdot T_1 = c \cdot T_1 \cdot \frac{x \text{Tg } x}{1 - \frac{1}{x} \text{Tg } x} = \frac{4A \cdot x}{l} \cdot \frac{b}{a^2} \left(1 - \frac{\text{Tg } x}{x} \right) \cdot \frac{x \text{Tg } x}{1 - \frac{\text{Tg } x}{x}}$$

oder, wenn die Werte für a und b eingesetzt werden:

$$Q_2 \cdot T_1 = 0,2388 \cdot J^2 \cdot \frac{2 \text{Tg } x}{a}.$$

Nun ist aber:

$$a^2 = \frac{1}{x \cdot A \cdot l} \left\{ 0 (s + \sigma + \varrho) - \frac{a}{4,2} \cdot W_0 \cdot J^2 \right\}$$

oder

$$a^2 = \frac{1}{x \cdot \pi r^2} \left\{ 2 \pi r (s + \sigma + \varrho) - \frac{a}{4,2} \cdot \omega_0 \cdot J^2 \right\},$$

wo ω_0 der elektrische Widerstand bei 0°C pro cm von dem Meßdraht bezeichnet.

Sehen wir ab von der Variation von ϱ mit der Länge des Drahtes, so folgt aus dieser Formel, daß a unabhängig ist von der Länge l , und daß $Q_2 \cdot T_1$ variiert mit der Länge des Drahtes genau in derselben Weise wie $\text{Tg } x$.

Wird x größer als 5, so können wir mit hinreichender Genauigkeit $\text{Tg } x = 1$ setzen, weil der Unterschied zwischen $\text{Tg } 5$ und 1 nur $1/10\text{‰}$ beträgt; in diesem Falle ist also die Ableitung durch die Enden dieselbe für den langen und kurzen Draht, und man darf die Methode von Goldschmidt verwenden.

Bei meinen Messungen ist für alle untersuchten Gase stets $x \geq 5$, und wir dürfen also für beide Doppelapparate annehmen, daß der Längenunterschied der Platindrähte eine konstante Temperatur hat, welche durch die Ableitung durch die Endflächen nicht beeinflusst wird, und erhalten hieraus, wenn D den Wärmeverlust bezeichnet pro Grad Temperaturunterschied und pro cm Länge von einem Draht mit Durchmesser $2r$ und ausgespannt in einem unendlich langen Zylinder von derselben Form:

$$D = 0,2388 \cdot J (E_l - E_k) \cdot \frac{1}{t_A (l - k)}, \quad \text{wo } t_A = \frac{W - w - (W_0 - w_0)}{\alpha (W_0 - w_0)}.$$

Hieraus sehen wir, daß wir aus meinen Messungen, sobald diese für die Ableitung durch die Endflächen korrigiert sind, und wenn keine Konvektion vorhanden ist, finden müssen, daß:

$$\underline{M = N = D}.$$

Die Größe der Strahlung von Platin ist auch bei niedrigen Temperaturen sehr gut bekannt¹⁾, und man kann leicht, da

1) Sophus Weber, Ann. d. Phys. 54, S. 178. 1917.

die Abmessungen bekannt sind, die entsprechende Korrektur anbringen, so daß wir dann aus dem Wert von D den Mittelwert für die Wärmeleitfähigkeit, K , in dem Temperaturgebiet, $0^\circ - t_A^\circ$, mittels der bekannten Formel erhalten:

$$D - \Sigma = \frac{2\pi K}{\ln_e \frac{R}{r} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)},$$

wo Σ die Korrektur für die Strahlung und γ der Koeffizient für den Temperatursprung bezeichnet.

§ 3. Bei den endgültigen Messungen wurden zwei Doppelapparate Nr. 4 und Nr. 6 verwendet; die Dimensionen der Apparate waren die folgenden:

Doppelapparat Nr. 4.

Apparat I	Apparat II
$2r = 0,005246 \text{ cm}$	$2r = 0,005246 \text{ cm}$
$l = 10,057 \text{ ''}$	$k = 3,388 \text{ ''}$
$2R = 1,526 \text{ ''}$	$2R = 1,526 \text{ ''}$
$2R_0 = 1,65 \text{ ''}$	$2R_0 = 1,65 \text{ ''}$
$W_0 = 4,5762 \text{ } \Omega$	$w_0 = 1,5416 \text{ } \Omega$
$\alpha_{0-100} = 0,003891$	$\alpha_{0-100} = 0,003891$
$\varkappa = 0,1649$	$\varkappa = 0,1649$
$\frac{4 A \varkappa}{l} = c_1 = 1,4178 \cdot 10^{-6}$	$\frac{4 A \varkappa}{k} = c_2 = 4,2084 \cdot 10^{-6}$

Doppelapparat Nr. 6.

Apparat I	Apparat II
$2r = 0,005246 \text{ cm}$	$2r = 0,005246 \text{ cm}$
$l = 11,908 \text{ ''}$	$k = 3,167 \text{ ''}$
$2R = 1,449 \text{ ''}$	$2R = 1,449 \text{ ''}$
$2R_0 = 1,58 \text{ ''}$	$2R_0 = 1,58 \text{ ''}$
$W_0 = 5,4187 \text{ } \Omega$	$w_0 = 1,4481 \text{ } \Omega$
$\alpha_{0-100} = 0,003888$	$\alpha_{0-100} = 0,003888$
$\varkappa = 0,1649$	$\varkappa = 0,1649$
$\frac{4 A \varkappa}{l} = c_1 = 1,1973 \cdot 10^{-6}$	$\frac{4 A \varkappa}{k} = c_2 = 4,5020 \cdot 10^{-6}$

In diesen Tabellen bezeichnet:

- $2r$ = der Durchmesser der Platindrähte,
 l und k = die Längen " "
 $2R$ = innerer Durchmesser des Glasrohres,
 $2R_0$ = äußerer " "
 W_0 und w_0 = die Widerstände bei 0° C der Platindrähte,
 α_{0-100} = Temperaturkoeff. des Widerstandes zwischen 0 u. 100° C ,
 \varkappa = Wärmeleitfähigkeit des Platins.

Die untersuchten Gase waren dieselben, die ich nach der Methode Schleiermachers untersucht habe; sie waren mit der größten Sorgfalt hergestellt und getrocknet mittels langsamer Strömung durch Kapillarröhren in flüssiger Luft.

Messungen mit dem Doppelapparat Nr. 4

Atmosphärische Luft. Die untersuchte atmosphärische Luft war trocken und frei von Kohlensäure; der Druck des Gases ist mit p bezeichnet und ist angegeben in cm Hg, auf 0° C und 45° Breite reduziert.

Die Messungen und die hierauf berechneten Werte findet man in untenstehender Tabelle:

$p = 28,36 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 9,90744 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 4,82615 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 1,61575 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 3,21040 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 16,568$	$t_k = 14,871$	$t_A = 17,428$
$Q/l = 685,3 \cdot 10^{-7}$	$q/k = 759,6 \cdot 10^{-7}$	
$Q/c_1 = 486,12$	$q/c_2 = 61,083$	
$m_1^2 = 29,44$	$m_2^2 = 3,341$	
$x_1^2 + m_1^2 = 464,22$	$x_2^2 + m_2^2 = 52,88$	
$M = 654,4 \cdot 10^{-7}$	$N = 657,6 \cdot 10^{-7}$	$D = 653,5 \cdot 10^{-7}$

$p = 13,07 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 9,90689 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 4,82700 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 1,61601 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 3,21099 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 16,633$	$t_k = 14,939$	$t_A = 17,495$
$Q/l = 682,7 \cdot 10^{-7}$	$q/k = 756,2 \cdot 10^{-7}$	
$Q/c_1 = 484,40$	$q/c_2 = 60,809$	
$m_1^2 = 29,44$	$m_2^2 = 3,341$	
$x_1^2 + m_1^2 = 462,53$	$x_2^2 + m_2^2 = 52,62$	
$M = 651,9 \cdot 10^{-7}$	$N = 654,4 \cdot 10^{-7}$	$D = 651,1 \cdot 10^{-7}$

$p = 3,010 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 9,90550 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 4,83225 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 1,61753 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 3,21472 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 16,975$	$t_k = 15,229$	$t_A = 17,860$
$Q/l = 670,1 \cdot 10^{-7}$	$q/k = 742,4 \cdot 10^{-7}$	
$Q/c_1 = 475,37$	$q/c_2 = 59,700$	
$m_1^2 = 29,43$	$m_2^2 = 3,341$	
$x_1^2 + m_1^2 = 453,72$	$x_2^2 + m_2^2 = 51,587$	
$M = 639,6 \cdot 10^{-7}$	$N = 640,0 \cdot 10^{-7}$	$D = 638,5 \cdot 10^{-7}$

In dieser Tabelle sieht man in der ersten Kolonne die Messungen und die hieraus berechneten Werte für den langen Draht; in der zweiten Kolonne die entsprechenden Werte für den kurzen Draht und in der dritten Kolonne die Werte, wenn wir die Goldschmidtsche Methode verwenden.

Aus diesen Werten sehen wir, wie auch in den folgenden Tabellen, daß der Unterschied zwischen M und N höchstens

$\frac{1}{3}$ Proz. beträgt, und daß dieser Unterschied unabhängig von dem verwendeten Druck ist; dieser Unterschied von höchstens $\frac{1}{3}$ Proz. ist nicht größer, als man übereinstimmend mit der Genauigkeit der Methode erwarten kann.

Wir dürfen also hieraus schließen, daß der Einfluß der Strömungen hinreichend klein gewesen ist, und daß die Methode von Goldschmidt, in Übereinstimmung mit den Berechnungen, für die verwendeten Doppelapparate anwendbar ist.

Aus diesen Messungen erhalten wir:

p_{cm}	$D \cdot 10^7$	t_A	$(D - \Sigma) \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7_{\text{kor.}}$
28,35	653,4	17,43	652,5	633,4	635,3
13,07	651,1	17,49	650,2	631,3	635,4
3,01	638,5	17,86	637,6	618,6	635,9

In der vierten Kolonne von dieser Tabelle finden wir den Wärmeverlust korrigiert für die Strahlung Σ , welche für diesen dünnen Platindraht sehr klein ist. — Aus den Abmessungen und der Strahlungsformel für Platin findet man $\Sigma = 0,9 \cdot 10^{-7}$ pro Grad Temperaturunterschied und pro cm Länge des Drahtes. In der fünften Kolonne findet man dieselbe Größe reduziert auf 0°C mittels des bekannten Temperaturkoeffizienten, $\frac{m}{2} = 0,001705$.¹⁾ In der sechsten Kolonne steht dieselbe Größe korrigiert für den Temperatursprung mittels der Formel:

$$(D - \Sigma')_{\text{kor.}} = (D - \Sigma') \left(1 + \frac{0,085}{p} \right)$$

in Übereinstimmung mit dem früheren gefundenen Wert für γ/λ .

Berechnen wir hieraus die Wärmeleitfähigkeit der trockenen kohlensäurefreien atmosphärischen Luft bei 0°C , erhalten wir:

$$K_0 = 573,8 \cdot 10^{-7} \text{ g} \cdot \text{cal/cm} \cdot \text{grad} \cdot \text{sec.}$$

Die Korrektion wegen der Dicke der Glaswand können wir für Luft vernachlässigen, weil diese nur $0,3 \text{ ‰}$ beträgt.

Neon. Mit demselben Doppelapparat, Nr. 4, wurde hier-nach eine Reihe von Messungen bei niedrigen Temperaturen ausgeführt.²⁾ Nach der Beendigung dieser Messungen wurden

1) Sophus Weber, Ann. d. Phys. 54. S. 352. 1917.

2) Sophus Weber, Kon. Akad. d. W. te Amsterdam XXVI. S. 1338. 1918.

die Widerstände W_0 und w_0 bei 0°C wieder sehr genau gemessen, und die folgenden Werte als Mittelwerte von mehreren Bestimmungen gefunden:

$$W_0 = 4,57684 \, \Omega \quad \text{und} \quad w_0 = 1,54151 \, \Omega.$$

Hiernach wurde eine Reihe von Präzisionsmessungen für Neon bei 0°C genommen. Die Resultate und die hieraus berechneten Werte findet man in der folgenden Tabelle:

$p = 35,74 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 9,91479 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 4,69106 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 1,57628 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 3,11478 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 8,689$	$t_k = 8,056$	$t_A = 8,996$
$Q/c_1 = 901,62$	$q/c_2 = 110,08$	
$m_1^2 = 29,49$	$m_2^2 = 3,35$	
$x_1^2 + m_1^2 = 871,56$	$x_2^2 + m_2^2 = 99,18$	
$M = 1228,6 \cdot 10^{-7}$	$N = 1230,4 \cdot 10^{-7}$	$D = 1229,3 \cdot 10^{-7}$

$p = 11,73 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 9,91490 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 4,69850 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 1,57701 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 3,11649 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 8,813$	$t_k = 8,176$	$t_A = 9,137$
$Q/c_1 = 889,44$	$q/c_2 = 108,52$	
$m_1^2 = 29,49$	$m_2^2 = 3,35$	
$x_1^2 + m_1^2 = 859,58$	$x_2^2 + m_2^2 = 97,69$	
$M = 1211,8 \cdot 10^{-7}$	$N = 1214,6 \cdot 10^{-7}$	$D = 1211,0 \cdot 10^{-7}$

$p = 4,18 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 9,91444 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 4,69978 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 1,57886 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 3,12092 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 9,181$	$t_k = 8,499$	$t_A = 9,528$
$Q/c_1 = 854,87$	$q/c_2 = 104,50$	
$m_1^2 = 29,49$	$m_2^2 = 3,35$	
$x_1^2 + m_1^2 = 825,61$	$x_2^2 + m_2^2 = 93,87$	
$M = 1163,7 \cdot 10^{-7}$	$N = 1166,8 \cdot 10^{-7}$	$D = 1162,1 \cdot 10^{-7}$

Aus dieser Tabelle sehen wir wieder, daß die Werte von M , N und D bei demselben Druck innerhalb der Genauigkeit der Messungen dieselbe Größe haben, obwohl es scheint, daß eine kleine systematische Abweichung zwischen M und N auch hier vorhanden ist. Wo diese Abweichung scheinbar unabhängig von dem Druck ist, wäre es anzunehmen, daß diese durch einen Fehler in einem von den Abmessungen des Apparates zu suchen wäre; in jedem Falle ist der Unterschied so gering, daß wir diesen vernachlässigen können und hieraus

ableiten, daß diese Messungen nicht durch Konvektion beeinflusst sind.

Aus diesen Messungen finden wir in derselben Weise wie bei den Berechnungen für atmosphärische Luft:

p_{cm}	t_A	$D \cdot 10^7$	$(D - \Sigma) \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7_{\text{kor.}}$
35,74	8,996	1229,3	1228,4	1213,6	1222,8
11,73	9,187	1211,0	1210,1	1195,3	1222,8
4,18	9,528	1162,1	1161,2	1146,4	1221,4

wo $\frac{m}{2} = 0,001360$ und $(D - \Sigma')_{\text{kor.}} = (D - \Sigma) \left(1 + \frac{0,270}{p}\right)$, in Übereinstimmung mit den früheren Bestimmungen von dem Temperaturkoeffizient und dem Temperatursprung.

Berechnen wir hieraus die absolute Wärmeleitfähigkeit des Neons bei 0° C, so erhalten wir, nachdem die Korrektur wegen der Dicke der Glaswand eingeführt worden ist:

$$K_0 = 1103,9 \cdot 10^{-7} \text{ g} \cdot \text{cal} / \text{cm} \cdot \text{grad} \cdot \text{sec.}$$

Messungen mit dem Doppelapparat Nr. 6

Atmosphärische Luft. Für trockene kohlensäurefreie atmosphärische Luft wurden die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte gefunden:

$p = 46,42 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 6,58363 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 3,66665 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 0,97695 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 2,68970 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 7,148$	$t_k = 6,361$	$t_A = 7,435$
$Q/c_1 = 673,63$	$q/c_2 = 53,634$	
$m_1^2 = 18,23$	$m_2^2 = 1,295$	
$x_1^2 + m_1^2 = 647,51$	$x_2^2 + m_2^2 = 45,788$	
$M = 651,0 \cdot 10^{-7}$	$N = 650,9 \cdot 10^{-7}$	$D = 650,7 \cdot 10^{-7}$

$p = 25,13 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 6,58329 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 3,66683 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 0,97695 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 2,68988 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 7,174$	$t_k = 6,376$	$t_A = 7,466$
$Q/c_1 = 671,10$	$q/c_2 = 53,505$	
$m_1^2 = 18,23$	$m_2^2 = 1,295$	
$x_1^2 + m_1^2 = 644,03$	$x_2^2 + m_2^2 = 45,660$	
$M = 647,5 \cdot 10^{-7}$	$N = 649,1 \cdot 10^{-7}$	$D = 648,0 \cdot 10^{-7}$

$$\begin{array}{l|l|l}
 p = 3,862 \text{ cm Hg} & & \\
 E_{10} = 6,58271 \cdot 10^{-1} \text{ Volt} & & \\
 E_l = 3,66823 \cdot 10^{-1} \text{ V} & E_k = 0,97727 \cdot 10^{-1} \text{ V} & E_l - E_k = 2,69096 \cdot 10^{-1} \text{ V} \\
 t_l = 7,302 & t_k = 6,482 & t_A = 7,601 \\
 Q/c_1 = 659,50 & q/c_2 = 52\,630 & \\
 m_1^2 = 18,23 & m_2^2 = 1,295 & \\
 x_1^2 + m_1^2 = 633,65 & x_2^2 + m_2^2 = 44,854 & \\
 M = 637,1 \cdot 10^{-7} & N = 637,6 \cdot 10^{-7} & D = 636,6 \cdot 10^{-7}
 \end{array}$$

Hierauf erhält man in derselben Weise wie früher:

p_{cm}	t_A	$D \cdot 10^7$	$(D - \Sigma) \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7_{\text{korrt.}}$
46,42	7,435	650,7	649,8	641,6	642,7
25,13	7,466	648,0	647,1	639,0	641,1
3,86	7,601	636,6	635,7	627,6	641,5

und mit Hilfe der Abmessungen von dem Doppelapparat Nr. 6

$$K_n = 574,2 \cdot 10^{-7} \text{ g} \cdot \text{cal} / \text{cm} \cdot \text{grad} \cdot \text{sec},$$

in vollständiger Übereinstimmung mit der Bestimmung mittels des Doppelapparates Nr. 4.

Wasserstoff. Infolge verschiedener Umstände wurden leider mit diesem Gase zu wenige Messungen vorgenommen, und sind diese, weil die verwendeten Drucke nicht hinreichend groß waren, nicht genügend für eine einwandfreie Präzisionsbestimmung der absoluten Leitfähigkeit für diese Gasart. — Die Messungen haben jedenfalls Interesse zur Beleuchtung der hier verwendeten Methode.

In der folgenden Tabelle findet man die Messungen und die daraus berechneten Werte:

$$\begin{array}{l|l|l}
 p = 15,72 \text{ cm Hg} & & \\
 E_{10} = 10,47543 \cdot 10^{-1} \text{ Volt} & & \\
 E_l = 5,73388 \cdot 10^{-1} \text{ V} & E_k = 1,53182 \cdot 10^{-1} \text{ V} & E_l - E_k = 4,20206 \cdot 10^{-1} \text{ V} \\
 t_l = 2,609 & t_k = 2,522 & t_A = 2,641 \\
 Q/c_1 = 4592,7 & q/c_2 = 337,48 & \\
 m_1^2 = 46,15 & m_2^2 = 3,28 & \\
 x_1^2 + m_1^2 = 4524,8 & x_2^2 + m_2^2 = 318,66 & \\
 M = 4549 \cdot 10^{-7} & N = 4531 \cdot 10^{-7} & D = 4552 \cdot 10^{-7}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
 p = 9,40 \text{ cm Hg} & & \\
 E_{10} = 10,4726 \cdot 10^{-1} \text{ Volt} & & \\
 E_l = 5,73395 \cdot 10^{-1} \text{ V} & E_k = 1,53180 \cdot 10^{-1} \text{ V} & E_l - E_k = 4,20215 \cdot 10^{-1} \text{ V} \\
 t_l = 2,682 & t_k = 2,588 & t_A = 2,717 \\
 Q/c_1 = 4467,7 & q/c_2 = 328,85 & \\
 m_1^2 = 46,15 & m_2^2 = 3,28 & \\
 x_1^2 + m_1^2 = 4400,8 & x_2^2 + m_2^2 = 310,27 & \\
 M = 4425 \cdot 10^{-7} & N = 4411 \cdot 10^{-7} & D = 4426 \cdot 10^{-7}
 \end{array}$$

Hieraus sehen wir, daß die Werte von M , N und D auch in diesem Falle innerhalb der Genauigkeit dieselben sind. — Wir erhalten hieraus:

p_{cm}	t_A	$D \cdot 10^7$	$(D - \Sigma) \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7_{\text{korr.}}$
15,72	2,641	4552	4551	4534	4736
9,40	2,717	4426	4425	4409	4738

$$\text{wo } \frac{m}{2} = 0,01402 \quad \text{und} \quad (D - \Sigma')_{\text{korr.}} = (D - \Sigma') \left(1 + \frac{0,70}{p}\right).$$

Die Korrektur für den Temperatursprung ist gemacht in Übereinstimmung mit meinen früheren Messungen, welche $\gamma/\lambda = 7,56$ gegeben haben; wo diese Korrektur eben für Wasserstoff bei niedrigen Drucken sehr groß ist, entsteht hierdurch eine bedeutende Unsicherheit in dem absoluten Wert für die Wärmeleitfähigkeit. Diese wird nach Einführung der Korrektur wegen der Dicke der Glaswand aus dem Wert für $(D - \Sigma') \cdot 10^7_{\text{korr.}}$ gefunden zu:

$$K_0 = 4238 \cdot 10^{-7} \text{ g} \cdot \text{cal} / \text{cm} \cdot \text{grad} \cdot \text{sec}.$$

Kohlensäure. Für reine trockene Kohlensäure habe ich mit dem Doppelapparat Nr. 6 eine sehr lange und genaue Messungsreihe vorgenommen; auch weil ich für dieses Gas bei meinen früheren Messungen Schwierigkeit mit den Konvektionsströmungen gehabt habe, in der Weise, daß es mir damals nicht gelungen ist den Einfluß von den Konvektionsströmungen hinreichend zu eliminieren. Die Messungen und die daraus berechneten Werte stehen in der folgenden Tabelle:

$p = 21,56 \text{ cm Hg}$		
$E_{10} = 4,47473 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$		
$E_l = 2,47570 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 0,65965 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 1,81605 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 5,409$	$t_k = 4,630$	$t_A = 5,693$
$Q/c_1 = 408,50$	$q/c_2 = 33,818$	
$m_1^2 = 8,42$	$m_2^2 = 0,598$	
$x_1^2 + m_1^2 = 387,97$	$x_2^2 + m_2^2 = 27,402$	
$M = 390,1 \cdot 10^{-7}$	$N = 389,6 \cdot 10^{-7}$	$D = 390,0 \cdot 10^{-7}$

$$p = 15,66 \text{ cm Hg}$$

$$E_{10} = 4,47450 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$$

$E_l = 2,47565 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 0,65960 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 1,81605 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 5,416$	$t_k = 4,621$	$t_A = 5,706$
$Q/c_1 = 407,90$	$q/c_2 = 33,876$	
$m_1^2 = 8,42$	$m_2^2 = 0,598$	
$x_1^2 + m_1^2 = 387,40$	$x_2^2 + m_2^2 = 27,458$	
$M = 389,5 \cdot 10^{-7}$	$N = 390,3 \cdot 10^{-7}$	$D = 389,1 \cdot 10^{-7}$

$$p = 6,28 \text{ cm Hg}$$

$$E_{11} = 4,47435 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$$

$E_l = 2,47593 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_k = 0,65969 \cdot 10^{-1} \text{ V}$	$E_l - E_k = 1,81624 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
$t_l = 5,453$	$t_k = 4,669$	$t_A = 5,739$
$Q/c_1 = 405,18$	$q/c_2 = 33,536$	
$m_1^2 = 8,42$	$m_2^2 = 0,598$	
$x_1^2 + m_1^2 = 384,73$	$x_2^2 + m_2^2 = 27,144$	
$M = 386,8 \cdot 10^{-7}$	$N = 385,9 \cdot 10^{-7}$	$D = 386,9 \cdot 10^{-7}$

$$p = 1,641 \text{ cm Hg}$$

$$E_{10} = 4,47430 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$$

.....	$E_l - E_k = 1,81707 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
.....	$t_A = 5,862$
.....	$D = 378,8 \cdot 10^{-7}$

$$p = 0,740 \text{ cm Hg}$$

$$E_{10} = 4,47403 \cdot 10^{-1} \text{ Volt}$$

.....	$E_l - E_k = 1,81865 \cdot 10^{-1} \text{ V}$
.....	$t_A = 6,107$
.....	$D = 364,0 \cdot 10^{-7}$

Aus dieser Tabelle sieht man deutlich, daß die Werte für M und N bei allen Drucken dieselben sind innerhalb der Meßgenauigkeit, woraus folgt, daß keine Konvektion die Wärmeleitung beeinflußt hat. In derselben Weise, wie früher, erhalten wir:

p_{cm}	t_A	$D \cdot 10^7$	$(D - \Sigma) \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7$	$(D - \Sigma') \cdot 10^7_{\text{korrt.}}$
21,56	5,693	390,0	389,1	382,8	383,8
15,66	5,706	389,1	388,2	381,9	383,2
6,28	5,739	386,9	386,0	379,3	382,6
1,641	5,862	378,8	377,9	371,8	384,0
0,740	6,107	364,0	363,1	357,2	383,8

wo $\frac{m}{2} = 0,00276$ und $(D - \Sigma)'_{\text{korr.}} = (D - \Sigma) \left(1 + \frac{0,055}{p}\right)$,
in vollständiger Übereinstimmung mit meinen früheren Bestimmungen für den Temperatursprung in Kohlensäure.

Für die absolute Wärmeleitfähigkeit bei 0° C für reine trockene Kohlensäure erhalten wir hieraus:

$$K_0 = 343,1 \cdot 10^{-7} \text{ g.cal/cm.grad.sec.}$$

In der folgenden Tabelle habe ich meine früheren und diese neuen Bestimmungen für die absolute Wärmeleitfähigkeit der Gase bei 0° C zusammengestellt:

	Frühere Bestimmungen	Neue Messungen		Diff. in %
Atm. Luft . . .	568,0 · 10 ⁻⁷	573,8 · 10 ⁻⁷	574,2 · 10 ⁻⁷	1
Wasserstoff . . .	4165 "	1104 · 10 ⁻⁷		1,5
Neon . . .	1089 "			
Helium . . .	3488 "			
Argon . . .	385,0 "			
Stickstoff . . .	566,0 "			
Sauerstoff . . .	576,8 "	343,1 · 10 ⁻⁷		1
Methan . . .	720,0 "			
Kohlensäure . . .	339,8 "			
Stickoxydul . . .	353,0 "			

Wir sehen hieraus, daß die neuen Messungen etwa 1 Proz. größer sind als die alten Werte, und es wäre, da es sich scheinbar hier um eine systematische Abweichung von ungefähr 1 Proz. handelt, natürlich diesen Unterschied in den Apparatkonstanten zu suchen; diese Erklärung ist aber nach meiner Auffassung ausgeschlossen, weil diese Konstanten in beiden Untersuchungen mit der äußersten Genauigkeit und der größten Sorgfalt bestimmt und kontrolliert sind. — Da die alten Messungen alle kleiner sind als die neuen Messungen, und da man sicher annehmen darf, daß diese letzten Messungen nicht durch Konvektion beeinflußt sind, ist es mir noch nicht möglich eine annehmbare Erklärung für diesen Unterschied zu geben.

Zum Schluß möchte ich noch darauf hinweisen, daß die Messungen von Schneider¹⁾ für Wasserstoff gut mit meinen alten Messungen übereinstimmen, während er für trockene

1) E. Schneider, a. a. O.

kohlensäurefreie atmosphärische Luft einen Wert von etwa 4 Proz. größer gefunden hat.

Die neueste Bestimmung für trockene, kohlensäurefreie atmosphärische Luft ist ausgeführt von Gregory und Archer¹⁾ nach der Goldschmidtschen Methode und mit vertikaler Aufstellung; sie finden bei 0° C und für $\Delta t = 15,697^\circ$, $K = 591,4 \cdot 10^{-7}$.

Reduzieren wir diesen Wert auf 0° C mittels $\frac{m}{2} = 0,001705$, so erhalten wir:

$$K_0 = 576,1 \cdot 10^{-7} \text{ g} \cdot \text{cal} / \text{sec} \cdot \text{grad} \cdot \text{cm},$$

also vollständig übereinstimmend mit meinen neuen Messungen, welche im Mittel geben:

$$K_0 = 574,0 \cdot 10^{-7} \text{ g} \cdot \text{cal} / \text{sec} \cdot \text{grad} \cdot \text{cm}.$$

Es wäre mit Rücksicht auf diese Differenzen, wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, von großer Bedeutung, wenn diese für die kinetische Gastheorie wichtigen Größen auch auf anderem Wege, z. B. mit einer Schutzring-Plattenmethode, bestimmt wurden.

Die Messungen, welche ich hier veröffentlicht habe, sind schon im Jahre 1916 in „Het Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips Gloeilampenfabrieken“, Eindhoven in Holland ausgeführt, und es ist mir eine angenehme Pflicht den Hrn. Direktoren A. F. Philips und Dr. Ing. G. L. F. Philips meinen besten Dank auszusprechen. — Auch der Direktion des Dänischen Carlsbergfonds bin ich für gewährleistete Hilfe zu Dank verpflichtet.

1) H. Gregory u. C. T. Archer, Phil. Mag. (7) 1. S. 594. 1926.

(Eingegangen 8. Januar 1927)

3. *Messungen im Strahlungsfelde einer in Grund- und Oberschwingungen erregten stabförmigen Antenne;*

von Ludwig Bergmann

(Marburger Habilitationsschrift)

(Hierzu Tafel VIII und IX)

A. Einleitung

Bis vor wenigen Jahren wurden in der drahtlosen Nachrichtenübermittlung beim Verkehr über große Entfernungen nur Wellenlängen über 1000 m benutzt und man ging beim transozeanischen Verkehr sogar zu Wellenlängen über 10000 m bis zu 24000 m über. Es waren hierfür verschiedene Gründe maßgebend. Berechnet man beispielsweise für eine bestimmte Entfernung die Empfangsenergien in Abhängigkeit von der Wellenlänge unter der Annahme, daß der Sender immer mit der gleichen Energie belastet wird, so ergibt sich eine Kurve der Fig. 1, die mit den praktisch erhaltenen Ergebnissen recht gut übereinstimmt. Für Wellenlängen unter 1000 m ist für die Entfernung 6000 km die Empfangsenergie praktisch gleich Null. Außerdem sind bei der Benutzung langer Wellen die Unterschiede zwischen den Nacht- und Tagwerten der Empfangsenergie wesentlich geringer als bei den kurzen Wellen und die lästigen Schwankungen der Empfangsenergie, die bei kurzen Wellen unter 1000 m in den Dämmerungs- und Nachtzeiten in ganz unregelmäßiger Weise störend auftreten, fallen bei den langen Wellen fast vollkommen weg. Aus all diesen Gründen kam man überhaupt nicht auf den Gedanken, zum Verkehr über große Entfernungen kurze Wellenlängen anzuwenden.

Vor etwa zwei Jahren zeigten aber amerikanische Amateure, daß es mit elektrischen Wellen unter 100 m möglich ist, mit ganz kleinen Sendeenergien große Reichweiten zu erzielen. Mit wenigen Watt Senderleistung ist heute ein Verkehr auf Entfernungen über 10000 km ohne weiteres möglich, und es

sind bereits eine ganze Anzahl von Kurzwellensendern auf den Wellen von 20—100 m in den drahtlosen Überseeverkehr von den einzelnen Sendegesellschaften eingesetzt worden.

Die Verwendung der kurzen elektrischen Wellen zum Senden hat nun eine ganze Reihe interessanter Fragen ergeben. Zunächst ist es die Frage, warum gerade bei den kurzen elektrischen Wellen unter 100 m die Ausbreitungsvorgänge so überaus günstig sind. Diese Frage ist eindeutig noch nicht gelöst. Dann sind es aber die Vorgänge der Ausstrahlung bei der Sendeantenne, die sich unter gewissen Bedingungen bei der Benutzung kurzer Wellen ganz anders gestalten als bisher bei den langen Wellen. Im allgemeinen wurde bisher eine Sendeantenne stets in der Grundschiwingung erregt, d. h. die Eigenschwingung der Antenne war gleich der benutzten Sendewelle.

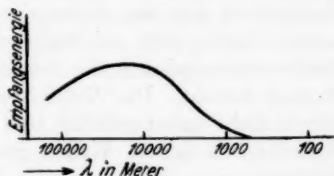


Fig. 1

Die Antenne wird dabei in der Nähe ihrer Erdung erregt; an der Erdungsstelle ergibt sich ein Strombauch, während an der Spitze der Antenne ein Spannungsbauch und ein Stromknoten sich ausbildet. Die benutzte Wellenlänge ist durchweg groß gegen die wirksame Antennenhöhe. Mit großer Annäherung läßt sich dann der „Strahlungswiderstand“ der Antenne, der maßgebend ist für die wirklich ausgestrahlte Leistung berechnen nach der Rüdenbergschen Formel:

$$w_s = 160 \pi^2 \left(\frac{h_w}{\lambda} \right)^2 \quad (h_w = \text{wirksame Antennenhöhe})$$

Um eine möglichst große Strahlungsleistung bei gegebener Wellenlänge und Senderenergie zu erzielen, muß man h_w möglichst groß machen. Praktisch ergeben sich natürlich sehr bald Grenzen. Den günstigsten Fall stellt die gewöhnliche Markoniantenne, ein einfacher senkrechter Draht, dar, der in einer Viertelwellenlänge schwingt. Dann ist

$$h_w = \frac{2}{\pi} l = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{4} \quad (l = \text{tatsächliche Antennenhöhe})$$

$$w_s = 36,6 \text{ Ohm.}$$

Schon bei einer Wellenlänge von 1000 m läßt sich dieser Fall aber kaum erreichen und bei noch größeren Wellenlängen etwa denen der Großstationen, die über 10000 m liegen, ist infolge der geringen wirksamen Antennenhöhe der Strahlungswiderstand kleiner als 1 und kommt in die Größenordnung der Verlustwiderstände der Antennenanlage wie Ohmscher Antennenwiderstand, Erdungswiderstand usw., so daß nur ein ganz geringer Prozentsatz der in die Antenne hineingesteckten Energie die Antenne als Nutzstrahlung verläßt. Bei Wellenlängen unter 100 m läßt es sich aber sehr leicht erreichen, daß die Antennenhöhe ein Viertel der Wellenlänge ist und es macht keine Schwierigkeiten, die Antenne sogar in Oberschwingungen zu erregen. Für den Fall $h = \frac{1}{2} \lambda$ läßt sich so der Strahlungswiderstand auf etwa 100 erhöhen. Gleichzeitig ist man in der Lage, die Stromverteilung auf der Antenne so einzurichten, daß sich am unteren Ende, also an der Erdungsstelle, ein Stromknoten befindet und dadurch der schädliche Erdungswiderstand in Wegfall kommt. Die Nutzleistung der Anlage steigert sich dadurch nicht unbeträchtlich und es lassen sich hierdurch zum Teil die mit kurzen Wellen erreichten großen Reichweiten erklären.

Es zeigt sich aber weiterhin, daß in dem Falle, wo die Antenne in Oberschwingungen erregt wird, die ausgestrahlte Energie den Antennendraht nicht mehr senkrecht, also bei senkrechter Antenne parallel zur Erdoberfläche verläßt, wie dies der Fall ist bei einer in der Grundschwingung erregten Antenne, sondern je nach der Zahl der benutzten Oberschwingungen und ihrer Verteilung auf dem Antennendraht unter einem spitzen Winkel gegen die Antennenrichtung, also bei senkrechter Antenne schräg nach oben ausgestrahlt wird. Es kann aber auch vorkommen, daß besonders bei Erregung der Antenne in höheren Oberschwingungen die ausgestrahlte Energie sich in mehrere Teile aufspaltet, die unter verschiedenen Winkeln gegen die Antennenrichtung ausgestrahlt werden. Theoretisch sind diese Verhältnisse zuerst von Abraham¹⁾ für den Fall eines geraden Stabes, der in Grund- und Oberschwingungen erregt wird, behandelt worden. Die Bilder des Ver-

1) M. Abraham, Eigenschwingungen des stabförmigen Erregers. Ann. d. Phys. **66**, S. 435. 1898. Funkentelegraphie und Elektrodynamik. Phys. Zeitschr. **22**, S. 329. 1901.

laufs der elektrischen Kraftlinien sind für diese Fälle von Hack¹⁾ gezeichnet worden. Ganz allgemein ist das Problem dann noch von van der Pol²⁾ theoretisch behandelt worden für den Fall, daß die Antenne durch eingeschaltete Kapazitäten und Selbstinduktionen am oberen und unteren Ende beschwert wird. Experimentell sind dann noch von Kiebitz³⁾ die harmonischen Oberschwingungen eines durch Funken erregten stabförmigen Erregers nachgewiesen worden und die Knoten und Bauchflächen der magnetischen Kraft in der näheren Umgebung des Erregers näherungsweise entsprechend der theoretischen Berechnung von Abraham festgestellt worden.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es nun, die Strahlung von stabförmigen Antennen experimentell zu untersuchen. Die Antennen werden sowohl in der Grundschwingung als auch in den verschiedenen gerad- und ungeradzahlgigen Oberschwingungen erregt. In verschiedenen Fällen wird versucht, durch eingeschaltete Spulen die Strahlung gewisser Teile der Antenne zu verhindern.

Praktisch sind die Ergebnisse insofern von Wert, als man beim Senden mit kurzen Wellen durch entsprechende analoge Erregung der Antenne die ausgestrahlte Energie unter gewissen Winkeln gegen die Antenne aussenden kann und sie von vornherein in solche Höhe der Atmosphäre schicken kann, wo z. B. nach der Theorie von Larmor⁴⁾ die Ausbreitung der elektrischen Wellen eine besonders günstige ist. Ferner ergibt sich die Möglichkeit mit solchen Antennen, bei denen die gesamte Strahlung schräg nach oben ausgestrahlt wird, ionisierte oder brechende Lagen in der Atmosphäre aufzufinden.

B. Bau der Apparatur

1. Der Sender

Es war von vornherein klar, daß für die erwähnten Untersuchungen nur ein Sender mit hinreichend kleiner Wellen-

1) F. Hack, Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines linearen Oszillators. *Ann. d. Phys.* **14**. S. 539. 1904.

2) van der Pol, jun., Über die Wellenlängen und Strahlung mit Kapazität und Selbstinduktion beschwerter Antennen. *Jahrb. d. drahtlosen Telegraphie* **13**. S. 217. 1918.

3) F. Kiebitz, *Ann. d. Phys.* **5**. S. 872. 1901.

4) J. Larmor, Die Ausbreitung der elektrischen Wellen um die Erde. *Phil. Mag.* **48**. S. 1025. 1924.

länge in Betracht kam, einmal damit die Ausdehnung der Sendeantenne bei Erregung in höheren Oberschwingungen nicht zu groß wurde, und andererseits damit die Wellenlänge klein blieb im Verhältnis zu der Entfernung, in der die Empfangsmessungen ausgeführt wurden. Letztere ließ sich nicht beliebig vergrößern, da als Empfänger nur ein einfacher Detektorempfänger in Verbindung mit einem empfindlichen Zeiger-galvanometer verwendet werden konnte. Die Benutzung von Spiegelgalvanometer oder die Verwendung besonderer Verstärkereinrichtungen am Empfänger mußten wegen der leichten Transportierbarkeit der ganzen Empfängerapparatur vermieden werden.

Mit Hilfe der modernen Hochvakuum-Elektronenröhren ist man heute in der Lage, ungedämpfte elektrische Wellen bis herunter zu 30 cm Wellenlänge zu erzeugen. Die Herstellung der ganz kurzen Wellen unter 100 cm gelingt dabei einwandfrei nur nach der von Barkhausen und Kurz¹⁾ angegebenen Methode. Diese kam aber für die vorgenannten Zwecke nicht in Frage. Einmal eignen sich nur ganz besondere Röhren zu dieser Schwingungserzeugung, und die erhaltenen Wellenlängen sind in starkem Maße abhängig von den Betriebsspannungen der Röhren. Ferner aber liegt die Röhre selbst im Strombauch des betreffenden Schwingungskreises und es ist daher nicht ohne weiteres möglich, Gebilde in Oberschwingungen zu erregen, ohne daß man Gefahr läuft, daß die Grundschwingung in verstärktem Maße auftritt und dann die Messungen stört. Ferner ist die Intensität der Schwingungen nicht besonders groß, und die Parallelschaltung mehrerer Röhren zur Erhöhung der Intensität ist nur mit Hilfe besonderer Kunstgriffe möglich. Mit den gewöhnlichen Röhren-senderschaltungen, bei denen die Schwingungserzeugung durch eine sogenannte Rückkoppelung zwischen den Anoden und Gitterkreis aufrechterhalten wird, gelingt es unter Verwendung gewöhnlicher Senderröhren, Wellenlängen bis herunter zu 3 m Wellenlänge mit ziemlicher Konstanz zu erzielen. Hierbei besteht die Selbstinduktion des Schwingungskreises nur aus einer einfachen Drahtschleife, während die Kapazität des Kreises von der inneren Röhrenkapazität zwischen Anode und Gitter gebildet wird. Diese innere Röhrenkapazität, zu der noch die

1) Barkhausen u. Kurz, Physikal. Zeitschr. 21. S. 1. 1921.

Kapazitäten der Zuleitungsdrähte hinzukommen, ist auch der Grund dafür, weshalb sich nicht noch kleinere Wellenlängen herstellen lassen. Nach einem aus der Röhrentechnik her bekannten Satze gibt es für die Selbstinduktion eines Röhrensenders bei gegebener Rückkoppelung, Röhrenkonstanten, Widerstand und Kapazität des Kreises eine untere Grenze, unterhalb der die Röhre im Kreise keine Schwingungen mehr unterhalten kann. Bei den gewöhnlichen Senderöhren ist aber die Eigenkapazität der Röhren bereits so groß, daß man mit der Wellenlänge nicht unter 3 m herunterkommt. Will man gleichzeitig die Sendeintensität möglichst groß machen, so gelingt dies nur unter Verwendung größerer Röhrentypen bzw. durch Parallelschaltung mehrerer kleinerer Röhren, wodurch aber in jedem Falle die störende Eigenkapazität des Röhrensystems erhöht und die Wellenlänge vergrößert wird.

Von Eccles und Jordan¹⁾ wurde 1919 eine Schaltung angegeben, die sich als sogenannte Gegentaktschaltung in die Röhrensendertechnik eingebürgert hat. Diese Schaltung erlaubt es, noch Wellen unter 3 m zu erzeugen. Es werden zur Schwingungserzeugung zwei Röhren benutzt, die so in den Schwingungskreis eingeschaltet sind, daß die Eigenkapazitäten der beiden Röhren hintereinander liegen und somit die resultierende Kapazität des Schwingungskreises gleich der halben Kapazität einer Röhre bei Verwendung gleicher Röhrentypen ist. Gleichzeitig erhöht sich die Intensität des Senders durch die Benutzung von zwei Röhren auf das Doppelte. Die Schaltung zeigt Fig. 2.

Der Schwingungskreis besteht aus dem Drahtkreis *a* als Selbstinduktion und den hintereinandergeschalteten Kapazitäten der beiden Röhren *R* 1 und *R* 2. Mit dem Drahtkreis *a* ist induktiv die Drahtschleife *b* gekoppelt, deren Enden zu den beiden Gittern der Röhren geführt sind. Dabei ist die

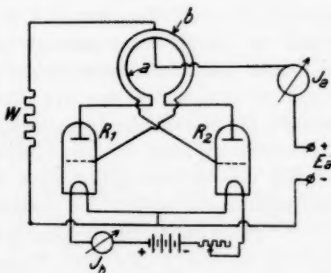


Fig. 2

1) Eccles u. Jordan, *Electrician* 83. S. 299. 1919.

Polung so getroffen, daß die Rückkoppelung im richtigen Sinne stattfindet. Die Zuführung der Anodenspannung E_a erfolgt in der Mitte des Drahtkreises a , und die Mitte der Drahtschleife b ist über einen Widerstand von etwa 5000 Ohm mit den Kathoden der beiden Röhren verbunden. Der eingeschaltete Widerstand W soll das Auftreten schädlicher Gitterströme verhindern. Durch die vollkommen symmetrische Leitungsführung ist erreicht, daß weder in der Zuführung zum Anodenkreis a noch in der Zuführung zum Gitterkreis b Hochfrequenzwechselströme fließen, da in der Mitte beider Spulen Knoten der Wechselspannung liegen. Die Zuführungsdrähte sind daher auch nicht von störendem Einfluß auf die Abstimmung der Kreise. Die Röhren selbst arbeiten im Gegenteil, da zwischen den beiden Anoden um 180° phasenverschobene Wechselspannungen herrschen.

In dieser Form wurde die Ecclessche Schaltung zur Erzeugung kurzer Wellen zuerst von Holborn¹⁾ angewandt, der damit im allergünstigsten Falle bei Benutzung gewöhnlicher Senderöhren allerdings unter Entfernung des störenden Röhrensockels bis zu Wellen von 2,4 m herunter kam. M. Mesny²⁾ gelang es, durch Verwendung von besonderen Spezialröhren, bei denen sowohl Anoden- wie Gitterzuführung getrennt nach verschiedenen Seiten aus der Röhre herausgeführt waren, um dadurch die schädliche innere Röhrenkapazität möglichst klein zu erhalten, Wellen bis zu 1,50 m zu erhalten.

Bei der Konstruktion des Senders zu den vorliegenden Untersuchungen wurde im wesentlichen die gleiche Schaltung und die gleichen Röhrentypen wie bei Mesny verwandt, und zwar die Röhre *TMC* der Firma Compagnie des Lampes in Paris. Der Heizstrom der Röhren betrug 2,8 Amp. bei einer Fadenspannung von 4 Volt. Die Schwingungsleistung jeder Röhre betrug etwa 6 Watt. Die Anodenspannung von 500 Volt wurde einer kleinen Umformermaschine entnommen, die primär an das städtische Lichtnetz von 220 Volt Gleichstrom angeschlossen war. Der Anodenstrom betrug pro Lampe etwa 90 Milliamp. Fig. 3, Taf. VIII zeigt den Zusammenbau des Senders. Deutlich sind die beiden Röhren mit den nach oben herausgeführten Gitter- und Anodenableitungen zu erkennen. Über den beiden Röhren befinden sich die beiden Drahtkreise, die

1) Holborn, Zeitschr. f. Physik **6**. S. 328. 1921.

2) M. Mesny, L'onde électrique **3**. S. 26. 1924.

den Anoden- und Gitterkreis bilden. Als Anodenkreis dient ein einfacher Drahttring von etwa 58 mm Durchmesser. Der aus gummiisoliertem Draht bestehende Gitterkreis ist von gleichem Durchmesser und direkt auf dem Anodenkreisring befestigt. In die Heizstromleitung zu beiden Röhren war je eine Drosselspule *D* von etwa 50 Windungen eingeschaltet (eine davon ist in Fig. 3 rechts unten sichtbar), die verhindern sollten, daß die als Zuleitung verwendete Doppellitze zu Schwingungen angestoßen wurde. Die mit diesen Sender erzielte Wellenlänge betrug 172 cm. Der Sender arbeitete sehr konstant. Auch während einer längeren Meßreihe, die oft mehrere Stunden dauerte, waren keinerlei Schwankungen festzustellen.

Die Ankoppelung der Antennendrähte geschah einfach in der Weise, daß die Mitte der geraden Antennenstäbe der Anodenkreisspule auf etwa 2 cm genähert wurden. Eine festere Ankoppelung etwa durch Verwendung einer Drahtschleife führte zu einem Aussetzen des Senders. Unter normalen Bedingungen betrug die Stromstärke im Strombauch eines in der Grundschiwingung erregten, also 86 cm langen Messingdrahtes von 4 mm Durchmesser etwa 0,8—1,0 Amp. Durch aufgesteckte dünnwandige Messingrohre ließ sich der Antennendraht beliebig verlängern.

2. Der Empfänger

Wie bereits oben erwähnt, kam als Empfänger nur ein einfacher Detektorempfänger in Verbindung mit einem empfindlichen Zeigergalvanometer in Betracht. Irgendwelche Verstärkungsrichtungen am Empfänger mußten vermieden werden, damit letzterer sich leicht transportieren ließ. Zur Ausmessung des Strahlungsfeldes der verschiedenen Antennen war es notwendig, daß der Empfänger in einer größeren Entfernung auf einem Kreis um den Sender als Mittelpunkt bewegt werden konnte. Die Antenne des Empfängers mußte sich ferner leicht in die Richtung des elektrischen Feldvektors einstellen lassen. Fig. 4 zeigt den Empfänger im Querschnitt und Fig. 5, Taf. VIII, in der Gesamtansicht. Auf einem 70 cm hohen, kräftigen, hölzernen Dreifuß ist in senkrechter Richtung verstellbar eine etwa 250 cm lange Holzstange befestigt. Diese trägt am oberen Ende eine runde Holzscheibe *b*, mit einer Bohrung in der Mitte, die als Lager für eine runde Holz-

stange *c* dient. Dieser Holzstab *c* hat eine Länge von etwa 1,50 m und ist an seinem unteren Ende in einem Draht ring *d* gelagert. Am oberen Ende des Stabes *c* befindet sich der eigentliche Empfänger. In einer Pertinaxplatte *e* sind zwei

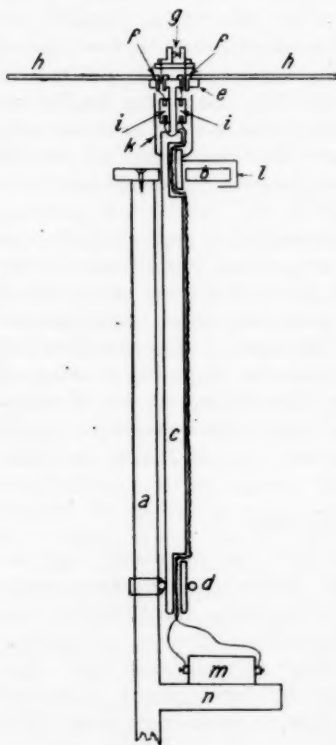


Fig. 4

Metallbuchsen *f* befestigt, in die sich der Detektor *g* von oben einstecken läßt. An die beiden Metallbuchsen *f* sind direkt die Antennenstäbe *h* angelötet, die sich durch Aufstecken von dünnen Messingrohren beliebig verlängern lassen. Von den Metallbuchsen *f* führt eine doppeladrig, verdrehte Litze über zwei kleine Spulen *i* nach unten zu dem Meßinstrument *m*, auf dem an der Stange *a* angebrachten Tisch *n*. Damit die Litzenleitung ein ungehindertes Drauf des Stabes *c* gestattet, ist an den Lagerstellen im Inneren des Stabes verlegt. Die kleinen Spulen *i* (Durchmesser etwa 10 mm) sind mit je 100 Windungen dünnen isolierten Drahtes bewickelt und sollen als Drosselspulen verhindern, daß irgendwelche hochfrequente Schwingungen, die von der Litzenleitung aufgenommen werden, dem Detektor zu-

Par
um
klei

den
Ob
Ein
ist.
los

Di
län
ne
Re
Se
mi
zw
Ri
no
D
Tr
ko
D
de

Parallel zum Meßinstrument lag ein variabler Widerstand, um die Empfindlichkeit des Instrumentes beliebig zu verkleinern.

C. Die Erregung von Oberschwingungen in einem stabförmigen Antennendraht

Es wurden zunächst einige Vorversuche unternommen, mit dem Sender einen stabförmigen Antennendraht in Grund- und Oberschwingungen zu erregen. Zu diesem Zweck wurde folgende Einrichtung gebaut, die in Fig. 6 schematisch wiedergegeben ist. Mit der Spule *a* des Anodenkreises des Senders wurde lose ein 0,6 mm starker Kupferdraht als Antenne gekoppelt.

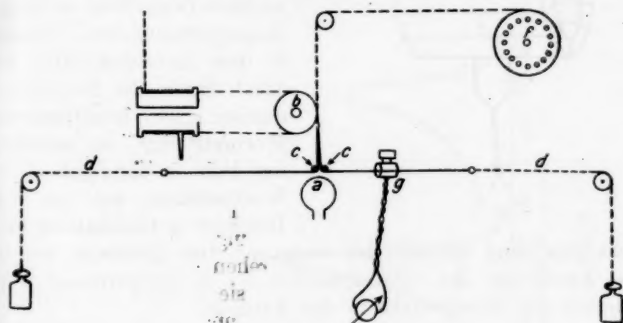


Fig. 6

Dieser Draht ließ sich auf folgende Weise gleichmäßig verlängern. Der Draht bestand aus zwei Teilen, die gemeinsam nebeneinander auf einer Holzrolle aufgewickelt waren. Diese Rolle *b* befand sich etwa 20 cm hoch über der Spule *a* des Senders. Von der Rolle liefen die beiden Drahtenden um zwei mit Rillen versehene Metallstifte *c* herum und wurden mittels zweier Schnüre *d* mit angehängten Gewichten in wagrechter Richtung gespannt gehalten. Um die Rolle *b* war gleichzeitig noch eine Schnur aufgerollt, die nach einer Trommel *f* führte. Durch ein langsames stückweises Abrollen der Schnur von der Trommel *f* konnte der Antennendraht um jeweils gleiche Stücke kontinuierlich nach beiden Seiten verlängert werden. Da die Drähte von der Rolle *b* in den wagrechten Antennendraht an der Stelle übergingen, an der die Erregung durch den Sender

und somit im Strombauch der Schwingungen lag, wurde die Abstimmung durch den auf der Rolle noch befindlichen Draht nicht gestört.

In der Nähe der Erregungsstelle umgab den Antennendraht eine kleine Ringspule g von der Form der Fig. 7.

Die Spule bestand aus 25 Windungen eines 0,8 mm starken isolierten Drahtes, der an zwei gegenüberliegenden Stellen

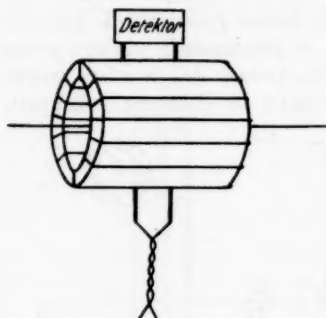


Fig. 7

unterbrochen war. An einer Unterbrechungsstelle war ein Detektor eingeschaltet und von der anderen Unterbrechungsstelle führte eine isolierte Doppellitze zu einem Zeigergalvanometer. Flossen in dem Antennendraht, der axial durch die Ringspulen durchging, hochfrequente Wechselströme, so induzierten diese in der Spule einen Wechselstrom, der von dem Detektor in Gleichstrom um-

gewandelt und mittels des Galvanometers gemessen wurde. Die Ausschläge des Galvanometers waren proportional dem Quadrat der Stromstärke in der Antenne.

Der Sender wurde bei der Messung vollkommen ungeändert gelassen und nur die Antennenlänge wurde gleichmäßig verlängert. In der Fig. 8 sind die gemessenen Galvanometerausschläge in Abhängigkeit von der Antennenlänge graphisch aufgetragen. Wie man erkennt, treten in der Antenne kräftige Schwingungen auf, wenn ihre Länge gleich einer halben Wellenlänge der erregenden Schwingung bzw. gleich einem ganzen Vielfachen derselben ist. Bei einer Drahtlänge von 80 cm haben wir die Grundschwingung, bei 164 cm die erste Oberschwingung des Antennendrahtes — die zugehörige Grundschwingung würde $\lambda = 2 \times 164 = 328$ cm sein — bei 252 cm liegt die zweite Oberschwingung usw., bis zur fünften Oberschwingung bei 511 cm. Bei der Grundschwingung, der zweiten und vierten Oberschwingung geschah die Erregung symmetrisch in der Mitte des ganzen Antennendrahtes. Um dagegen die erste, dritte und fünfte Oberschwingung zu erhalten, war eine un-

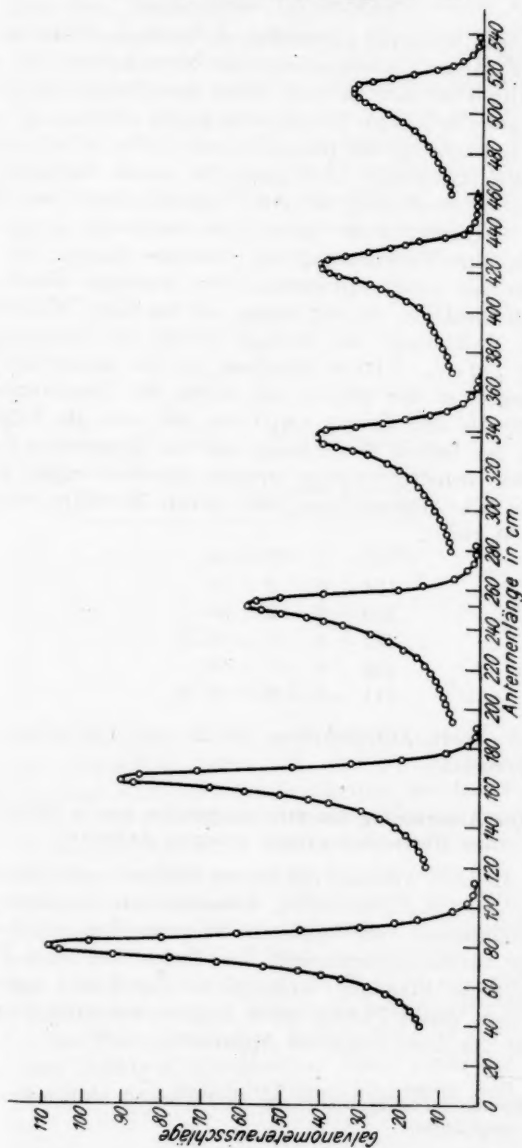


Fig. 8

symmetrische Erregung notwendig, da in diesen Fällen in der Mitte der ganzen Antennenlänge ein Stromknoten lag. Auf jeden Fall ist es aber möglich, einen geradlinigen Antennendraht in jeder beliebigen Oberschwingung zu erregen. Bei einer genauen Betrachtung der Resonanzkurve in Fig. 8 fällt es auf, daß die Resonanzstellen nicht genau bei einem Vielfachen der in der Grundschiwingung erregten Antennenlänge von 80 cm liegen. Dies rührt wohl daher, daß durch die aufgesetzte Ringspule eine Verstimmung der Antenne eintritt; bei Erregung in der Grundschiwingung tritt Resonanz bereits bei einer Antennenlänge ein, die kleiner als die halbe Wellenlänge ist. Die Wellenlänge des Senders betrug am Lechersystem gemessen 172 cm. Addiert man nun zu den gemessenen Antennenlängen in der Fig. 8, bei denen die Resonanzstellen liegen, jeweils den Betrag von 6 cm, der sich als Differenz zwischen der halben Wellenlänge und der gemessenen Länge der in der Grundschiwingung erregten Antenne ergibt, so erhält man als Antennenlänge, bei denen Resonanz eintritt, folgende Werte:

$$\begin{aligned} 80 + 6 &= 1 \times 86 \\ 164 + 6 &= 2 \times 86 \\ 252 + 6 &= 3 \times 86 \\ 337 + 6 &= 4 \times 85,75 \\ 424 + 6 &= 5 \times 86 \\ 511 + 6 &= 6 \times 86,16, \end{aligned}$$

bei denen nur die Antennenlänge für die erste Oberschwingung etwas herausfällt.

D. Die Ausmessung des Strahlungsfeldes der in Grund- und Oberschwingungen erregten Antennen

Um die beim Arbeiten mit kurzen Wellen so sehr störenden Einflüsse von Zimmerwänden, benachbarten Metalleitungen und Metallmassen von vornherein zu vermeiden, wurden die gesamten Strahlungsmessungen im Freien auf dem Platze des Marburger Stadions¹⁾ ausgeführt. Fig. 9 gibt eine einfache Skizze dieses Platzes unter Angabe der Größenverhältnisse und der Aufstellung der Apparatur.

1) Für die Zurverfügungstellung des Platzes bin ich Hrn. Dr. Jack zu Dank verpflichtet.

Der oben beschriebene Röhrensender wurde auf einem 2,70 m hohen Holzgestell aufgebaut, wie dies aus der Fig. 10, Taf. IX, deutlich zu erkennen ist. Unter dem Tisch befindet sich die Umformermaschine zur Erzeugung der Anodenspannung, auf dem Tisch links die Akkumulatorenbatterie zur Heizung der Röhren. Die Anbringung der Antennenstäbe am Sender geschah in der Weise, daß sie von 25 cm hohen Galalithstützen getragen wurde, die in 80 cm Abstand auf einer 5 m langen

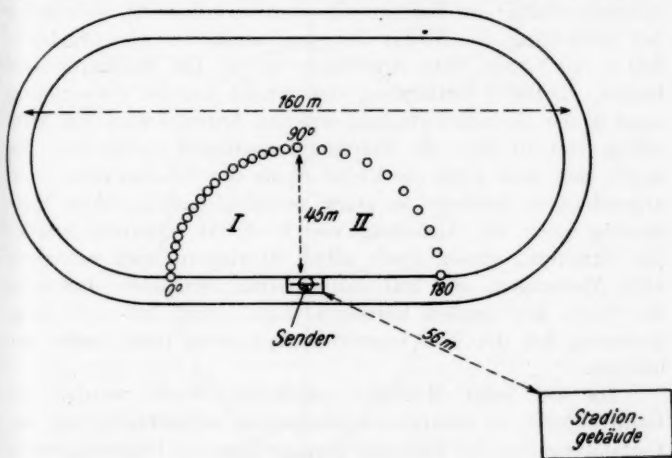


Fig. 9

Holzlatte befestigt waren. Die Antennen lagen, wie aus der Fig. 17 erkenntlich, horizontal, also parallel zum Erdboden. Ihr Abstand vom Erdboden betrug 3 m, also fast zwei Wellenlängen, so daß von einem störenden Einfluß des Bodens bei den Messungen abgesehen werden konnte. Der ebenfalls oben beschriebene Empfänger wurde bei den einzelnen Messungen auf einen Kreis von 45 m Durchmesser um den Sender als Mittelpunkt herumgeführt; Ablesungen wurden dabei in dem Quadranten 1 von 5 zu 5 Grad vorgenommen, in dem Quadranten 2 dagegen nur von 10 zu 10 Grad, um eine Kontrolle für die Symmetrie des Feldes zu haben. Begonnen wurde mit jeder Messung bei dem Punkte 90° und der Quadrant 1 bis zum Punkte 0° durchlaufen. Dann wurde der Empfänger wieder nach dem Punkte 90° zurückgebracht, dort wurde eine

Kontrollmessung vorgenommen, um die Konstanz des Senders zu beobachten und hierauf wurde der Quadrant 2 durchgemessen. Zum Schlusse jeder Meßreihe wurde wieder eine Kontrollmessung am Punkte 90° vorgenommen. An jedem der einzelnen Meßpunkte wurde die Antenne des Empfängers so gedreht, daß das Meßinstrument einen maximalen Ausschlag zeigte. Dann stimmte die Antennenrichtung mit der Richtung des elektrischen Vektors überein. Was die Größe der Galvanometeraus schläge am Empfangsinstrument anbetrifft, so wurden bei Benutzung des Nádír-Zeigergalvanometers (Empfindlichkeit $1 \cdot 10^{-6}$ Amp./Skt.) Ausschläge bis zu 120 Skalenteile erhalten. In 100 m Entfernung vom Sender war bei Verwendung einer in der Grundschiwingung erregten Antenne noch ein Ausschlag von 10 Skt. am Empfangsinstrument vorhanden. Es zeigte sich, daß sogar die kleine Spule des Senders ohne jede angeschaltete Antenne so stark strahlte, daß in 45 m Entfernung noch ein Ausschlag von 6—8 Skt. erhalten wurde. Die Strahlung dieser Spule allein überlagerte sich natürlich allen Messungen. Sie läßt sich dadurch vermeiden, daß man die Spule des Senders horizontal legt. Doch ließ sich diese Änderung bei der hier benutzten Apparatur nicht mehr anbringen.

Die bei jeder Meßreihe erhaltenen Werte wurden als Radiivektoren in Polarkoordinatenpapier aufgetragen und die Verbindungslinie der Endpunkte ergab dann ein Polardiagramm der von der Antenne ausgesandten Strahlungen. Da die Galvanometeraus schläge der Energie des elektromagnetischen Feldes proportional sind, sind die Radiivektoren proportional der Energie, die von der Antenne durch eine Einheitsoberfläche einer Kugel mit konstantem Halbmesser um den Sender als Mittelpunkt ausgestrahlt wird.

1. Die in der Grundschiwingung erregte stabförmige Antenne

Die Länge des Antennendrahtes betrug $\lambda/2=86$ cm. Die Erregung geschah in der Mitte. Die Ergebnisse der Messung zeigt die Fig. 11. Die eingezeichneten kleinen Kreise geben die gemessenen Werte wieder, die ausgezeichnete Kurve ist die theoretisch errechnete Verteilung der ausgestrahlten Energien. Die Berechnung dieser Kurve erfolgte nach der Gleichung:

$$\Sigma = a \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \cos \left(\frac{n\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right\}^2,$$

die der Arbeit von Abraham (a. a. O.) entnommen ist und die für die ungeradzahligen Eigenschwingungen einer stabförmigen Antenne die ausgestrahlte Energie Σ in Abhängigkeit von dem Winkel ϑ angibt, den die Antennenrichtung mit der von der Antennenmitte nach dem Empfangspunkt gezogenen Geraden bildet. n ist = 1, 3, 5 usw. und in diesem Falle, wo wir es mit der Grundschiwingung zu tun haben, = 1 zu setzen.

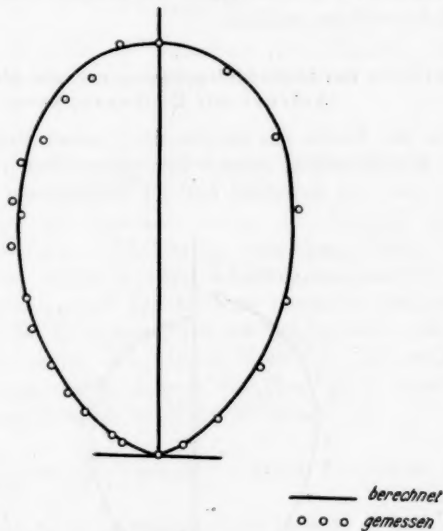


Fig. 11

a ist ein Proportionalitätsfaktor, der im vorliegenden Falle gleich dem beim Winkel 90° gemessenen Werte gesetzt wurde.

Die gemessenen Werte stimmen recht gut mit den theoretisch errechneten überein. Der größte Energiebetrag wird senkrecht zur Antennenrichtung, also in der Äquatorebene der Antenne ausgestrahlt. Nach den Polen der Antenne nimmt die ausgestrahlte Energie stetig ab und in Richtung der Antenne ist die Strahlung vollkommen Null. In der Praxis der drahtlosen Telegraphie stellt der vorliegende Fall die gewöhnliche Markoniantenne dar, die bekanntlich aus einem einfachen senkrechten Draht besteht, der in seiner Länge gleich einer Viertel-

wellenlänge der auszustrahlenden Schwingung ist. In der Fig. 11 stellt die Gerade vom Antennenmittelpunkt nach dem Punkte $\theta = 90^\circ$ gewissermaßen einen Schnitt durch die Erdoberfläche dar, auf der die Antenne als senkrechter Draht errichtet ist. Man kann sich ja stets bei der Behandlung der Strahlungsvorgänge einer Antenne die Erde durch ein genaues Spiegelbild der benutzten Antenne ersetzt denken. Bei der Markoniantenne wird demnach die stärkste Strahlung parallel der Erdoberfläche erfolgen.

2. Die in der Grundschwingung erregte stabförmige Antenne mit Endkapazitäten

Auf die Enden des stabförmigen Antennendrahtes wurden runde Metallscheiben gesetzt mit einem Durchmesser von 10 und 15 cm. Bei Erregung mit der Wellenlänge 172 cm betrug

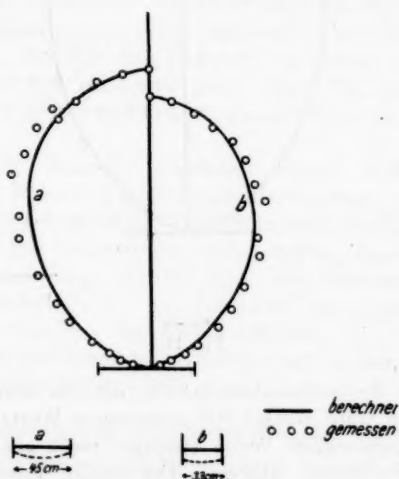


Fig. 12

im ersten Falle die Antennenlänge 45 cm, im zweiten Falle 33 cm. Die Erregung erfolgte wieder in der Mitte der Antenne. Die erhaltenen Messungsergebnisse sind in Fig. 12 wiedergegeben. Die kleinen Kreise geben die gemessenen Werte, die ausgezogene Kurve die errechneten Werte an. Die Kurve a

gilt für die an den Enden durch die kleinen Scheiben, die Kurve *b* für die durch die größeren Scheiben beschwerte Antenne.

Die theoretischen Kurven sind errechnet unter der Annahme, daß wir es mit Hertzschen Dipolen zu tun haben. Es gilt dann für die ausgestrahlte Energie Σ in Abhängigkeit vom Winkel ϑ die Gleichung:

$$\Sigma = a \sin^2 \vartheta.$$

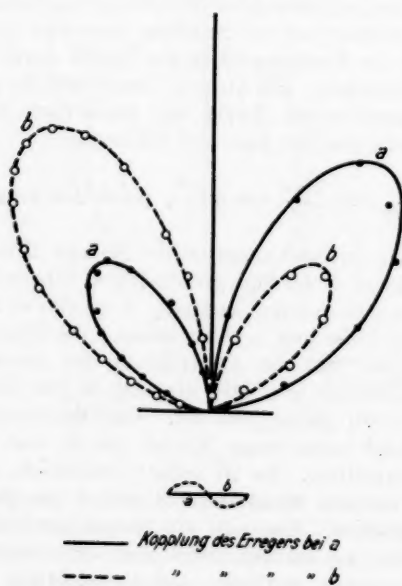
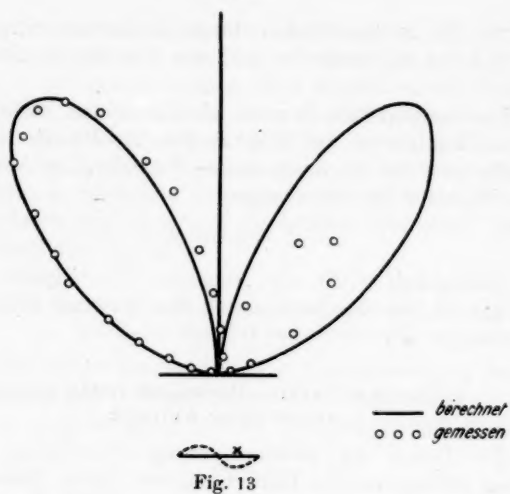
In Wirklichkeit trifft die Annahme von Dipolen nur annähernd zu, da die Ausdehnung der Antenne nicht zu vernachlässigen ist.

3. Die in der ersten Oberschwingung erregte stabförmige Antenne

Die Länge der Antenne betrug $\lambda = 172$ cm. Die Erregung erfolgte in $\lambda/4$ Entfernung von einem Ende. In der Fig. 13, die das aufgenommene Strahlungsdiagramm zeigt, ist die Stromverteilung auf der Antenne besonders eingezeichnet und die Stelle der Erregung durch den Sender durch ein kleines Kreuz gekennzeichnet. Die kleinen Kreise sind die gemessenen Werte, die ausgezogene Kurve die theoretisch errechneten. Die Berechnung geschah nach der Gleichung:

$$\Sigma = a \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right\}^2, \text{ (nach Abraham, a. a. O.)}$$

die die von der Antenne ausgestrahlte Energie Σ in Abhängigkeit vom Winkel ϑ für die geradzahligen Oberschwingungen einer stabförmigen Antenne darstellt. n ist also $= 2, 4, 6$ usw. und in diesem Falle hier $= 2$ zu setzen. Die Fig. 13 läßt zunächst erkennen, daß die Ausstrahlung der Antenne sowohl in der Äquatorebene ($\vartheta = 90^\circ$) als auch in der Richtung der Antenne ($\vartheta = 0^\circ$) gleich Null ist. Das Maximum der Ausstrahlung erfolgt unter einem Winkel von 50 bzw. 130° gegen die Antennenrichtung. Es ist selbstverständlich, daß in den nicht ausgemessenen Quadranten 3 und 4 die gleichen Verhältnisse herrschen. Um sich ein räumliches Bild der Antennenstrahlung zu machen, muß man sich das gezeichnete Strahlungsdiagramm um die Antennenrichtung als Achse rotierend denken. Die der obigen Gleichung zugrundeliegende



Theorie verlangt nun, daß die in der Hauptstrahlrichtung in den Quadranten 1 und 2 ausgestrahlte Energie von gleichem Betrage ist, der Versuch ergibt jedoch, wie aus der Fig. 13 deutlich erkennbar, daß die Strahlung in dem Quadranten wesentlich geringer ist, der zu derjenigen Antennenhälfte gehört, an der die Erregung durch den Sender stattfindet. Wurde nämlich die Erregung an der anderen Antennenhälfte vor-

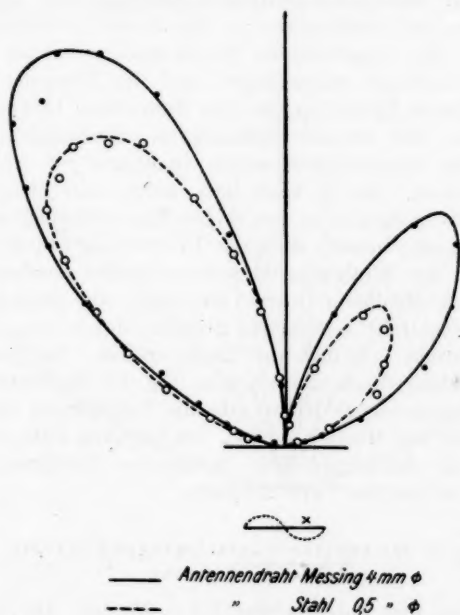


Fig. 15

genommen, so vertauschten die beiden Strahlungsäste ihre Lage. Diesen Fall zeigt die Fig. 14. Die Kurve *a* gilt für den Fall, daß die Erregung der Antenne an der Stelle *a*, die Kurve *b* für den Fall, daß die Erregung an der Stelle *b* stattfindet. Wie man sieht, ergeben in beiden Fällen die gemessenen Werte eine recht gute Kurve und die Kurve *a* erscheint als genaues Spiegelbild der Kurve *b* in bezug auf die in der Antennenmitte auf der Antennenrichtung errichtete Senkrechte.

Der Grund für den Unterschied zwischen der theoretischen experimentell ermittelten Strahlungskurve liegt darin, daß die Theorie bei der Berechnung gleich große Stromamplituden in den einzelnen Strombäuchen auf der Antenne voraussetzt. In Wirklichkeit aber wird infolge der Verluste durch Strahlung und durch Joulesche Wärme die Amplitude in dem Strombauch, wo die Erregung stattfindet, größer sein als in dem benachbarten. Bei dieser einfachen Antennenform ließ sich eine Messung der Stromstärke in den beiden Strombäuchen ermöglichen. Ein empfindliches Hitzdrahtamperemeter wurde in einen Strombauch eingeschaltet und die Erregung durch den Sender unter Einhaltung gleicher Koppelung bald an dem einen bald an dem anderen Strombauch vorgenommen. Das Verhältnis der Stromstärken wurde annähernd zu $0,75 : 0,54 = 1,40$ gemessen. Es ist klar, daß, wenn man dieses Verhältnis der Stromstärken in den beiden Strombäuchen der Antenne noch größer macht, auch der Unterschied zwischen den beiden Ästen des Strahlungsdiagrammes größer werden muß. Um dies zu kontrollieren wurde die bisher aus einem 4 mm starken Messingdraht bestehende Antenne durch einen gleichlangen Stahldraht von 0,35 mm Dicke ersetzt. Das jetzt erhaltene Strahlungsdiagramm zeigt in Fig. 15 die gestrichelte Kurve. Die ausgezogene Kurve gibt die Verhältnisse bei dem Antennendraht aus Messing wieder. Im letzteren Falle beträgt das Verhältnis der Amplituden maximaler Strahlung 1,47, während es im ersteren Falle 2,19 ist.

4. Die in der zweiten Oberschwingung erregte stabförmige Antenne

Die Länge der Antenne war $\frac{3}{2} \lambda = 258$ cm. Die Stromverteilung auf den Antennendraht ist in der Fig. 16, in der die Messungsergebnisse wiedergegeben sind, besonders aufgezeichnet. Die ausgezogene Kurve ist nach der Gleichung:

$$\Sigma = a \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right\}^2$$

berechnet. Die Strahlung der Antenne zerfällt jetzt in drei Anteile. Ein Teil wird senkrecht zur Antenne in der Äquatorebene ausgestrahlt, die beiden anderen Anteile unter einem Winkel von 40 bzw. 140° gegen die Richtung der Antenne.

Die Strahlung wird Null für $\cos \vartheta = 1, \frac{1}{3}$, also für $\vartheta = 0$ (Antennenrichtung) $\vartheta = 70^\circ 30'$ bzw. $\vartheta = 109^\circ 30'$. In bezug auf diese Strahlungsrichtung stimmt der experimentelle Befund vollkommen mit der theoretischen Berechnung überein. Dagegen weicht die Amplitude der senkrecht zur Antenne ausgestrahlten Energie beträchtlich von dem Wert ab, den die Theorie erfordert. Dies hat nun wieder seinen Grund darin, daß bei der Berechnung nicht berücksichtigt wurde, daß die

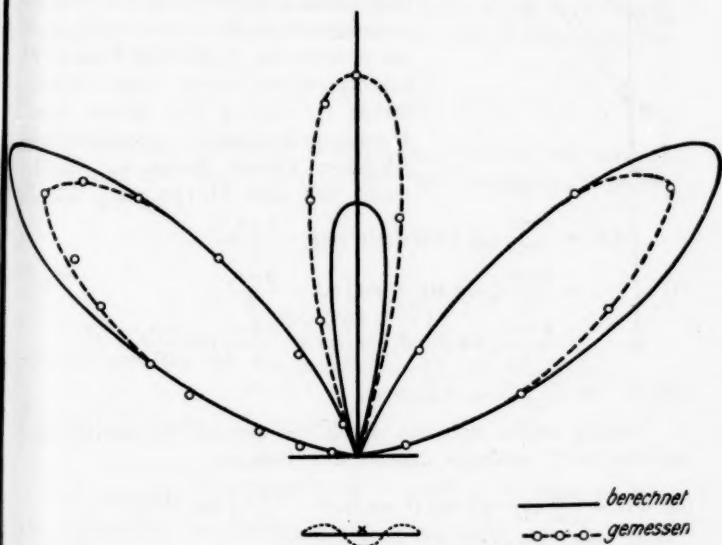


Fig. 16

Stromstärken in den drei Schwingungsbäuchen auf der Antenne nicht gleich groß sind. Bei der angegebenen Erregung in der Mitte wird dort die Stromamplitude größer sein als in den beiden Strombäuchen an den Enden, und zwar wird sie in demselben Verhältnis zu diesen stehen, wie sich dies bei der auf S. 524 angegebenen Messung ergab. Berücksichtigt man diese besonderen Stromverhältnisse, so ergibt auch die Rechnung eine Kurve, wie sie durch das Experiment gefunden wurde.

Im folgenden gebe ich kurz den Weg an, wie die bisher benutzte Formel zur Berechnung der Strahlung in Abhängigkeit

von dem Ausstrahlungswinkel erhalten wird und wie es möglich ist, auch die verschieden großen Stromamplituden in den einzelnen Strombäuchen mit zu berücksichtigen.

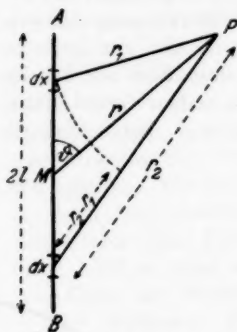


Fig. 17

In der Fig. 17 sei AB die Antenne. Sie werde in der Mitte erregt und ihre Gesamtlänge sei $2l$. P sei ein Empfangspunkt in der zur Wellenlänge großen Entfernung r vom Antennenmittelpunkt. Die Intensität des elektrischen Feldes im Punkte P hervorgerufenen durch einen kleinen Strom i_x , der in den beiden zum Antennenmittelpunkt spiegelbildlich gelegenen kleinen Teilen dx fließt, ergibt sich nach Hertz zu:

$$(1) \quad \begin{cases} dE = \frac{2\pi c}{\lambda r_1} i_x dx \sin \vartheta \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda} \right) \\ \quad + \frac{2\pi c}{\lambda r_2} i_x dx \sin \vartheta \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} \right) \\ \quad = \frac{4\pi c}{\lambda r} i_x dx \sin \vartheta \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \cos \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \end{cases}$$

Hierbe ist $\frac{r_1 + r_2}{2} = r$ gesetzt.

Analog ergibt sich das durch die gleichen Elemente der Antenne in P erzeugte magnetische Feld zu:

$$(2) \quad dH = \frac{4\pi}{\lambda r} \cdot i_x \cdot dx \sin \vartheta \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \cos \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}.$$

Aus der Konstruktion der Fig. 17 folgt:

$$\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \vartheta.$$

Das durch die gesamte Antenne in P hervorgerufene elektrische und magnetische Feld ergibt sich aus den Gl. (1) und (2) durch Integration über die halbe Antennenlänge. Es ist:

$$E = \frac{4\pi c}{\lambda r} \sin \vartheta \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \int_0^l i_x \cdot dx \cdot \cos \left(\frac{2\pi x \cos \vartheta}{\lambda} \right)$$

und

$$H = \frac{4\pi}{\lambda r} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \int_0^l i_x \cos \left(\frac{2\pi x \cos \vartheta}{\lambda} \right) dx.$$

Für die Strahlung durch die Einheit der Oberfläche senkrecht zu dem Radiusvektor r in der Zeit dt folgt sodann:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Sigma &= \frac{1}{4\pi} \cdot E \cdot H dt = \frac{4\pi c \cdot \sin^2 \vartheta}{\lambda^2 r^2} \sin^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \\ &\quad \left[\int_0^l i_x \cos \left(\frac{2\pi x \cos \vartheta}{\lambda} \right) dx \right]^2 dt. \end{aligned} \right.$$

Nun ist die Stromverteilung auf einer in der Grundschwingung erregten Antenne von der Gesamtlänge $2l$, wenn I_0 die maximale Stromamplitude in der Mitte des Strombauches der Antenne bedeutet:

$$i_x = I_0 \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{2l} \right),$$

wo x die Entfernung des betreffenden Punktes auf der Antenne von der Mitte der Antenne aus gerechnet bedeutet. Setzen wir noch:

$$2l = \frac{\lambda}{2} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi l}{\lambda} = \alpha,$$

so ist

$$i_x = I_0 \cdot \cos \left(\frac{\alpha x}{l} \right)$$

und wir erhalten für das Integral in Gl. (3) den Wert:

$$\begin{aligned} &\int_0^l I_0 \cos \left(\frac{\alpha x}{l} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha x}{l} \cos \vartheta \right) dx \\ &= \frac{l}{\alpha \sin^2 \vartheta} [\sin \alpha \cos(\alpha \cos \vartheta) - \cos \vartheta \cos \alpha \sin(\alpha \cos \vartheta)]. \end{aligned}$$

Der Mittelwert der Strahlung durch die oben genannte Einheitsoberfläche ist dann:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{2\pi c I_0^2}{\lambda^2 r^2} \cdot \frac{l^2}{\alpha^2 \sin^2 \vartheta} [\sin \alpha \cos(\alpha \cos \vartheta) - \cos \vartheta \cos \alpha \sin(\alpha \cos \vartheta)]^2 \\ &= \frac{c I_0^2}{2\pi r^2 \sin^2 \vartheta} [\sin \alpha \cdot \cos(\alpha \cos \vartheta) - \cos \vartheta \cos \alpha \sin(\alpha \cos \vartheta)]^2. \end{aligned}$$

In unserem Falle, wo wir es mit der zweiten Oberschwingung zu tun hatten, ist nun:

$$l = \frac{3}{4} \lambda \quad \text{und demnach} \quad \alpha = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{3\pi}{2}$$

und somit

$$\Sigma = a \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right\}^2, \quad \text{wo} \quad a = \frac{c \cdot I_0^2}{2\pi r^2} \quad \text{ist.}$$

Dies ist aber die bereits oben benutzte Gleichung, nach der die Kurve in Fig. 16 gezeichnet wurde. Der Versuch ergab aber nun, daß die Stromamplitude in den Strombäuchen, die wir bis jetzt überall gleich I_0 annahmen, in den Strombäuchen an den Enden der Antenne kleiner ist. Um dies in der Rechnung zu berücksichtigen, kann man so vorgehen, daß man zuerst nur die Strahlung der beiden äußeren in einer halben Wellenlänge schwingenden Antennenteile berechnet und hierzu die Strahlung des mittleren Antennenteiles addiert unter Berücksichtigung einer größeren Stromamplitude I_0' . Man hat also

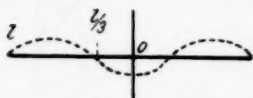


Fig. 18

in der Gl. (3) zuerst von $x = l/3$ bis $x = l$ zu integrieren (vgl. Fig. 18). Sodann hat man dieselbe Gleichung von $x = 0$ bis $x = l/3$ zu integrieren und statt I_0 den Wert I_0' einzusetzen. Als Endformel erhält

man dann, wenn man gleichzeitig $I_0' : I_0 = 1,40$ dem früher gefundenen Verhältnis der Stromamplituden setzt:

$$\Sigma = \frac{c I_0^2}{2 \pi r^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left\{ \cos \frac{3 \pi}{2} \cos \vartheta \right\} + 0,4 \left[\sin \frac{\pi}{6} \cos \left(\frac{\pi}{6} \cos \vartheta \right) - \cos \vartheta \cos \frac{\pi}{6} \sin \left(\frac{\pi}{6} \cos \vartheta \right) \right]^2.$$

Nach dieser Gleichung ist die ausgezogene Kurve in Fig. 19 errechnet. Die Kreise geben wieder die gemessenen Werte an. Es sind dies dieselben wie in Fig. 16. Die Übereinstimmung zwischen den experimentell und theoretisch gefundenen Werten kann als gut bezeichnet werden. Abnahme der Stromamplitude in den beiden äußeren Strombäuchen gegenüber der Stromamplitude im mittleren Teil der Antenne bewirkt also, daß der in der Äquatorebene ausgestrahlte Energieanteil verstärkt hervortritt.

Es wurde nun auch hier noch, ebenso wie im vorigen Fall, die Dämpfung der Antenne künstlich vergrößert, indem die 4 mm starke Messingantenne, einmal durch eine gleich starke Stahlantenne und sodann noch durch ein 0,3 mm starken Stahldraht ersetzt wurde. Die Ergebnisse sind in der Fig. 20 dargestellt. Je stärker die Antenne gedämpft wurde, um so kleiner werden die Amplituden der Seitenäste der ausgestrahlten Energie im Verhältnis zu der in der Äquatorebene ausgestrahlten Energien.

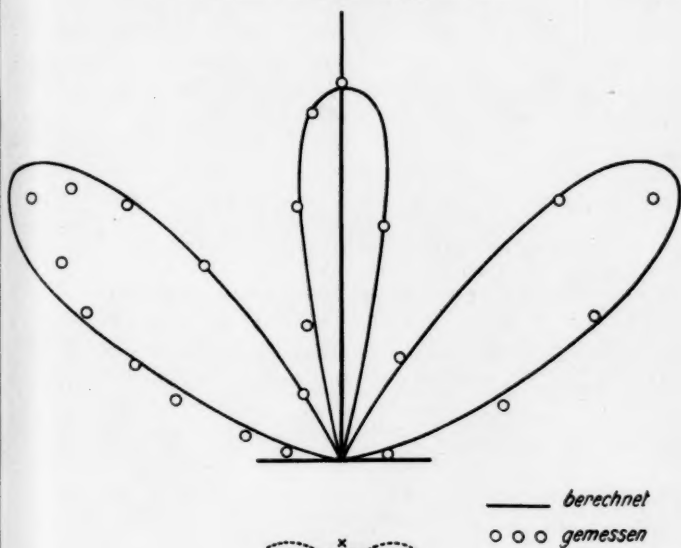


Fig. 19

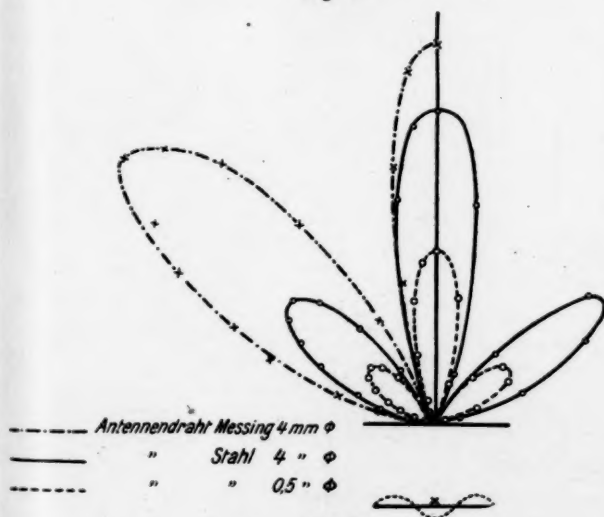


Fig. 20

In der Praxis der drahtlosen Telegraphie ist es bei Verwendung kurzer Wellenlängen jederzeit möglich, eine zur Erdoberfläche senkrecht stehende Antenne in der zweiten Oberschwingung zu erregen. Ungefähr ein Drittel der Gesamtstrahlung wird dann parallel der Erdoberfläche senkrecht von der Antenne, die restlichen zwei Drittel unter einem Winkel von 40° gegen die Antenne schräg nach oben ausgestrahlt.

5. Die in der zweiten Oberschwingung erregte stabförmige Antenne, bei der die Strahlung des mittleren Teiles durch eine eingeschaltete Spule unterdrückt ist

In die Mitte der Antenne wurde an der Stelle, wo die Erregung durch den Sender stattfand, eine kleine Spule mit $1\frac{1}{2}$ Windungen von 80 mm Durchmesser eingeschaltet. Die Antennenlänge verringerte sich dadurch auf 197 cm. Die Messungsergebnisse sind in der Fig. 21 durch die eingezeichneten kleinen Kreise wiedergegeben. Die ausgezogene Kurve ist berechnet nach der Gleichung:

$$\Sigma = a \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left\{ \cos \vartheta \sin(\pi \cos \vartheta) + \cos \vartheta \cos \frac{\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi}{3} \cos \vartheta \right) - \sin \frac{\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} \cos \vartheta \right) \right\}^2.$$

Diese Gleichung erhält man aus der Gl. (3), S. 527, indem man von $x = \frac{l}{2}$ bis $x = l$ integriert und in $\alpha = \frac{2\pi l}{\lambda}$ den Wert $l = \frac{\lambda}{2}$ setzt. Dadurch ist dann nur die Strahlung der in je einer halben Wellenlänge schwingenden beiden äußeren Antennenhälften berücksichtigt. In Wirklichkeit strahlt natürlich auch die in der Antennenmitte eingeschaltete Spule etwas, doch läßt sich dieser Strahlungsanteil nicht ohne weiteres in Berechnung berücksichtigen.

Die soeben behandelte Antennenform hat in der Praxis bei der Benutzung

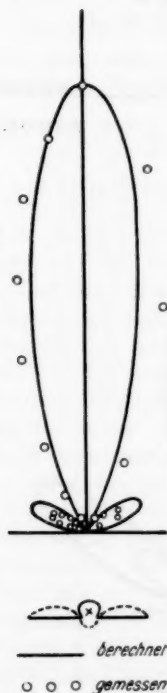


Fig. 21

kurzer Wellenlängen eine gewisse Bedeutung erlangt (vgl. z. B. Britisches Patent Nr. 242342), indem sie es gestattet, die Gesamtstrahlung der Antenne in der Äquatorebene derselben, also bei senkrecht errichteter Antenne parallel zur Erdoberfläche auszusenden und zwar unter einem wesentlich kleineren Winkel als es bei der in der Grundschiwingung erregten Antenne (Fig. 11) möglich war.

6. Die in der dritten Oberschwingung erregte stabförmige Antenne

Die Gesamtlänge der Antenne war $2\lambda = 344$ cm. Da wir es mit einer geradzahligten Oberschwingung zu tun haben, in der Mitte der Antenne also ein Stromknoten liegt, mußte die Erregung wieder unsymmetrisch geschehen. In der Fig. 22 ist

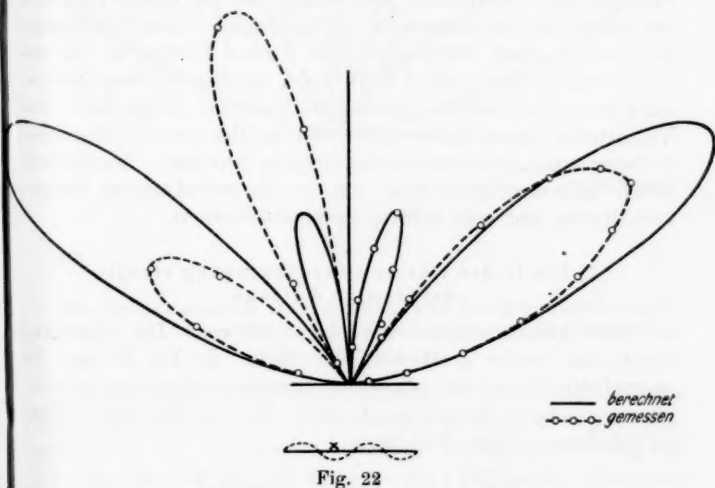


Fig. 22

die Stromverteilung auf der Antenne und die Stelle der Erregung durch den Sender besonders eingezeichnet. Die durch eine gestrichelte Kurve verbundenen Kreise geben das experimentell gefundene Strahlungsdiagramm wieder. Die ausgezogene Kurve ist berechnet nach der Gleichung:

$$\Sigma = a \cdot \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \sin (2 \pi \cos \vartheta) \right\}^2.$$

Die Gesamtstrahlung der Antenne zerfällt in vier Teile. Die Ausstrahlung wird Null für die Werte: $\cos \vartheta = 1, \frac{1}{2}, 0$, d. h. für $\vartheta = 0^\circ$ (Antennenrichtung), $\vartheta = 60^\circ$, $\vartheta = 90^\circ$ (Äquatorebene), $\vartheta = 120^\circ$ und $\vartheta = 180^\circ$ (Antennenrichtung). In bezug auf die Strahlrichtungen stimmen die gefundenen Werte vollkommen mit der Berechnung überein. Dies ist jedoch nicht der Fall in bezug auf die Amplitude der Strahlungsäste. Nach der Berechnung sollen die mehr zur Äquatorebene geneigten Äste in ihrer Amplitude wesentlich kleiner sein als die unter einem spitzen Winkel zur Antennenrichtung ausgestrahlten. In der rechten Hälfte der Fig. 22 stimmen diese Verhältnisse annähernd; daß der größere Strahlungsast etwas zu klein ausgefallen ist, liegt wieder daran, daß die Amplituden der Stromstärken in den einzelnen Strombäuchen auf der Antenne verschieden groß sind. In der anderen Hälfte des Strahlungsdiagrammes haben dagegen die beiden Strahlungsanteile ihre Lage vertauscht. Der Grund hierfür ist die unsymmetrische Erregung der Antenne, die verschiedene Stromstärken in den beiden Antennenhälften zur Folge hat. Die Verhältnisse liegen hier genau so wie bei der oben behandelten, in der zweiten Oberschwingung erregten Antenne. Rechnerisch lassen sich die Verhältnisse infolge der unbekannten Stromverhältnisse nur sehr schwer genau bestimmen.

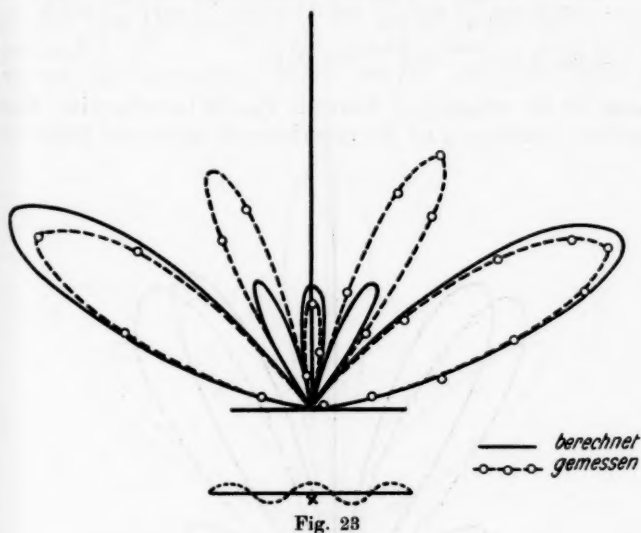
7. Die in der vierten Oberschwingung erregte stabförmige Antenne

Die Antennenlänge war $\frac{5}{2} \lambda = 430$ cm. Die Erregung durch den Sender geschah in der Mitte. In Fig. 23 gibt die gestrichelte Kurve das gemessene Strahlungsdiagramm wieder. Die ausgezogene Kurve wurde nach der für die vierte Oberschwingung gültigen Gleichung:

$$\Sigma = a \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \cos \left(\frac{5\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right\}^4$$

errechnet. Die Gesamtstrahlung der Antenne zerfällt jetzt in fünf Anteile. An den Stellen $\cos \vartheta = 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$, also für $\vartheta = 0^\circ$ (Antennenrichtung), 53° , 78° , 102° und 127° , für welche Werte die rechte Seite der obigen Gleichung gleich Null wird, wird die Strahlung der Antenne Null. In bezug auf die Strahlungsrichtungen stimmen die Messungen mit der Berechnung wieder vollkommen überein. Abweichungen treten

dagegen wieder auf bei den Amplituden der in den einzelnen Richtungen ausgesandten Energie, da in der Berechnung die in den einzelnen Strombäuchen verschiedenen großen Stromamplituden nicht berücksichtigt werden konnten.



8. Die in der vierten Oberschwingung erregte stabförmige Antenne, bei der die Strahlung des mittleren Strombauches unterdrückt ist

In die Mitte der im letzten Abschnitt behandelten Antenne wurde die bereits oben in Abschnitt 5 benutzte Spule eingeschaltet. Die Gesamtantennenlänge betrug sodann 369 cm. Die Fig. 24 gibt in der gestrichelten Kurve das gemessene Strahlungsdiagramm wieder. Von den fünf Strahlungsästen, die auftraten, wenn die Spule nicht eingeschaltet war, sind der mittlere und die beiden äußeren bis auf kleine Reste verschwunden, während in den beiden übrigen Strahlungsrichtungen die Energie in verstärktem Maße ausgesandt wird. Es wurde versucht, das Strahlungsdiagramm rechnerisch zu ermitteln, indem in derselben Weise wie bei Fall 5 die Gleichung (3) auf S. 527 nur über dem Teil integriert wurde, der

an der Strahlung beteiligt war. Es ergab sich dann die Gleichung:

$$\Sigma = a \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left\{ \sin \frac{9\pi}{4} \cos \left(\frac{9\pi}{4} \cos \vartheta \right) - \cos \vartheta \cos \frac{9\pi}{4} \sin \left(\frac{9\pi}{4} \cos \vartheta \right) - \sin \frac{9\pi}{20} \cos \left(\frac{9\pi}{20} \cos \vartheta \right) + \cos \vartheta \cos \frac{9\pi}{20} \sin \left(\frac{9\pi}{20} \cos \vartheta \right) \right\}^2$$

nach der die ausgezogene Kurve in Fig. 24 berechnet ist. Eine gewisse Annäherung an die experimentell gefundene Kurve ist

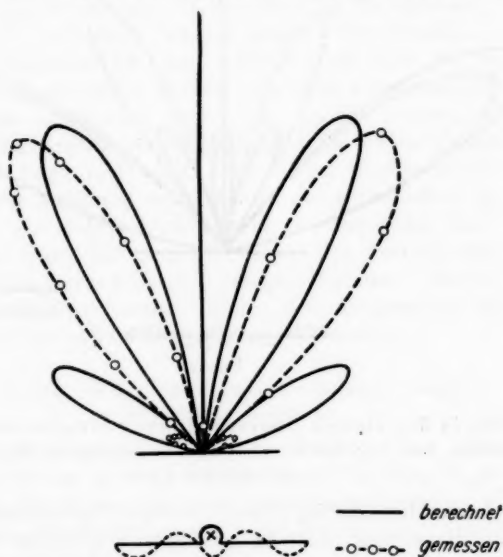


Fig. 24

vorhanden. Die seitlichen Strahlungsäste fallen jedoch größer aus. Ferner ist die Strahlungsrichtung um etwa fünf Grad verdreht. Schuld an diesen Abweichungen sind einmal die nicht zu berücksichtigenden verschiedenen Stromstärken in der Antenne und dann die Tatsache, daß der mittlere Teil der Antenne nicht völlig strahlungslos ist, da die Spule ebenfalls ein Strahlungsfeld besitzt, das sich der anderen Strahlung der Antenne überlagert.

9. Die in der vierten Oberschwingung erregte stabförmige Antenne, bei der die Strahlung zweier symmetrisch liegender Strombäuche durch Einschaltung von Spulen unterdrückt ist

Im ungefähren Abstand $\lambda/2$ von den Enden der Antenne wurden zwei kleine Spulen in die Antenne eingeschaltet. Die Länge der Antenne betrug 238 cm. Die Erregung fand in der vierten Oberschwingung statt. An der Strahlung beteiligt

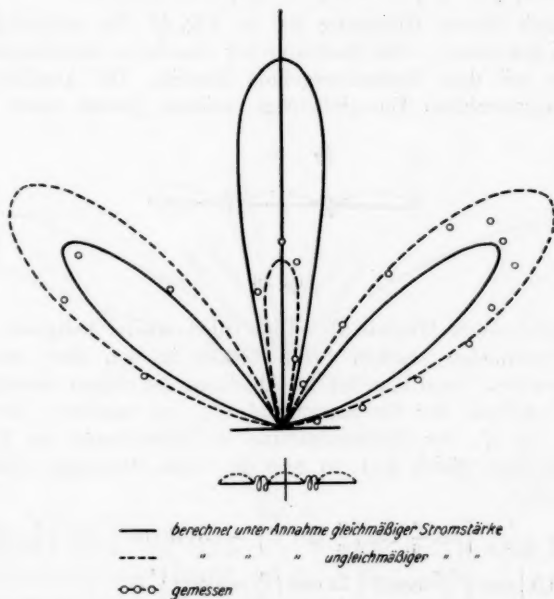


Fig. 25

waren aber nur drei Strombäuche. Die gemessenen Werte sind in der Fig. 25 als kleine Kreise eingetragen. Die Gesamtstrahlung zerteilt sich in drei Teile, der kleinere Anteil wird in der Äquatorebene ausgestrahlt, die beiden anderen unter einem Winkel von 40° bzw. 140° gegen die Antennenrichtung geneigt. Rechnerisch läßt sich dieser Fall behandeln, indem wiederum die Gleichung (3) auf S. 527 nur über die wirklich strahlenden Teile der Antenne integriert wird. Man hat also

zunächst zu integrieren (vgl. Fig. 26) von $x = l/3$ bis $x = l$ und dann von $x = 0$ bis $x = l/3$ und beide Teile zu addieren. In $\alpha = \frac{2\pi l}{\lambda}$ ist $l = \frac{3}{4}\lambda$ bzw. bei der zweiten Integration $l = \lambda/4$ zu setzen. Man erhält dann die Gleichung:

$$\Sigma = a \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left\{ \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(\frac{\pi}{6} \cos \vartheta \right) - \cos \vartheta \cos \frac{\pi}{6} \sin \left(\frac{\pi}{6} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{3\pi}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right\}^2.$$

Nach dieser Gleichung ist in Fig. 25 die ausgezogene Kurve gezeichnet. Die Richtung der einzelnen Strahlungsäste stimmt mit dem Versuchsergebnis überein. Die Amplituden der ausgestrahlten Energiebeträge weichen jedoch stark von

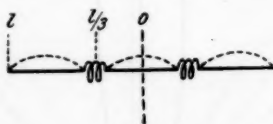


Fig. 26

den gemessenen Werten ab. Dies rührt wieder lediglich von den verschieden starken Stromstärken in den drei Strombäuchen her. Setzt man bei der Ableitung der obigen Gleichung das Verhältnis der Stromamplitude I_0' im mittleren Strombauch zu I_0' , der Stromamplitude im Strombauch am Ende der Antenne, gleich 2:1, so geht die obige Gleichung über in Gleichung:

$$\Sigma = a \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left\{ \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(\frac{\pi}{6} \cos \vartheta \right) - \cos \vartheta \cos \frac{\pi}{6} \sin \left(\frac{\pi}{6} \cos \vartheta \right) - 0,5 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right] \right\}^2.$$

Nach ihr ist die gestrichelte Kurve in Fig. 25 gezeichnet, die recht gut die experimentell gefundenen Werte erreicht. Im allgemeinen ähnelt das hier gefundene Strahlungsdiagramm dem der in der zweiten Oberschwingung erregten Antenne, das wir oben im Falle 2 behandelt haben.

10. Die in der fünften Oberschwingung erregte stabförmige Antenne

Die Länge der ganzen Antenne betrug $\frac{5}{2}\lambda = 516$ cm. Da es sich wieder um eine geradzahlige Oberschwingung handelt,

geschah die Erregung der Antenne durch den Sender im ersten neben der Antennenmitte liegenden Strombauch. In der Fig. 27 sind die Messungsergebnisse sowie das nach der Gleichung:

$$\Sigma = a \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \sin \left(\frac{6\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right\}^2$$

berechnete Strahlungsdiagramm wiedergegeben. Die Strahlung der Antenne zerfällt in sechs Teile. Die Nullstellen der

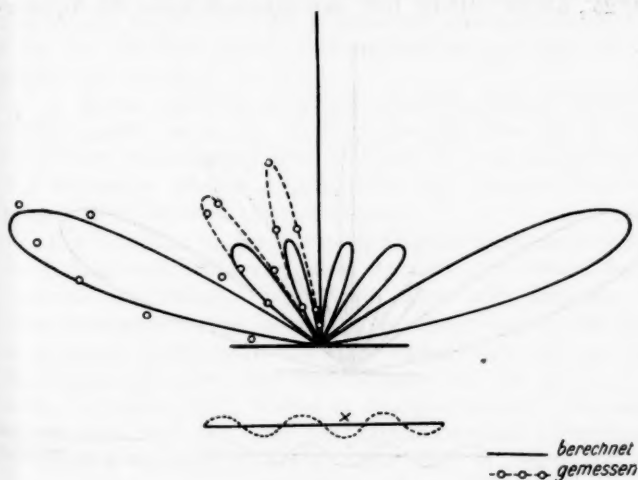


Fig. 27

Strahlung liegen bei $\cos \vartheta = 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0$, d.h. bei $\vartheta = 0^\circ$ (Antennenrichtung), $48^\circ 12'$, $70^\circ 32'$, 0° (Äquatorebene), $109^\circ 28'$, $131^\circ 48'$ und 180° . Die stärkste Strahlung erfolgt in den beiden Ästen, die der Antennenrichtung am benachbartesten sind. Sie fallen allerdings bei der Messung etwas zu klein aus infolge der ungleichen Stromamplituden in den einzelnen Strombäuchen der Antenne.

11. Die in der sechsten Oberschwingung erregte stabförmige Antenne

Die Länge der jetzt wieder symmetrisch in der Mitte erregten Antenne war $\frac{7}{2} \lambda = 602$ cm. Fig. 28 gibt das gemessene und das nach der Gleichung

$$\Sigma = a \left\{ \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \cos \left(\frac{7\pi}{2} \cos \vartheta \right) \right\}^2$$

berechnete Strahlungsdiagramm wieder. Die Strahlung der Antenne zerfällt jetzt in sieben Teile. Die Zahl der auftretenden Strahlungsäste stimmt also wie auch in den bisher behandelten Fällen stets mit der Anzahl der auf der Antenne vorhandenen Strombäuche überein. Nullstellen der Strahlung liegen bei $\cos \vartheta = 1, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}, 0$, d. h. bei $\vartheta = 0^\circ$ (Antennenrichtung), $44^\circ 25'$, $64^\circ 38'$, $81^\circ 48'$ bzw. den entsprechenden zur Äquator-

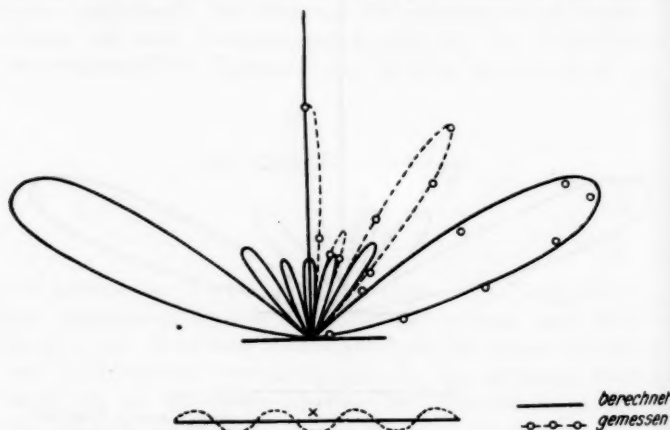


Fig. 28

ebene spiegelbildlichen Stellen. Das Vorhandensein dieser Nullstellen und das Auftreten der entsprechenden Strahlungsäste wird durch die Messung genau bestätigt. Abweichungen sind nur in bezug auf die in den einzelnen Ästen ausgesandte Energieamplitude vorhanden. Der größte Teil der Energie wird aber, wie auch im vorigen Falle, unter einem spitzen Winkel gegen die Antennenrichtung ausgestrahlt. Gerade die beiden zuletzt behandelten Fälle zeigen, daß es beim Senden mit kurzen Wellen möglich ist unter Benutzung einer zur Erdoberfläche senkrechten Antenne, die in einer Oberschwingung erregt wird, den größeren Teil der Energie unter einem spitzen Winkel gegen die Antennenrichtung schräg nach oben ausstrahlen. Dieser Energieanteil verläßt die Antenne als Raum-

wellenstrahlung. Beim Arbeiten mit langen Wellen haben wir es dagegen stets fast nur mit einer Oberflächenstrahlung zu tun, weil sich die Antenne wegen der praktisch nicht zu verwirklichenden großen Antennenhöhe nicht in Oberschwingungen erregen läßt.

Zusammenfassung

1. Es wird die Konstruktion eines Röhrensenders zur Erzeugung ungedämpfter Schwingungen mit einer Wellenlänge von 172 cm beschrieben, der es gestattet, eine stabförmige Antenne in beliebigen gerad- und ungeradzahligen Oberschwingungen zu erregen.

2. Mittels eines besonders gebauten Empfängers wird das Strahlungsfeld der in der Grundschiwingung bzw. der in verschiedenen Oberschwingungen erregten Antenne ausgemessen. Die Messungen werden ausgeführt bis zur Erregung der Antenne in der sechsten Oberschwingung.

Bei Erregung in der Grundschiwingung wird die gesamte Strahlung senkrecht von der Antenne in ihrer Äquatorebene ausgesandt. Geht man aber zur Erregung in Oberschwingungen über, so erfolgt eine Strahlung der Antenne in mehreren Richtungen, und zwar ergeben sich stets so viele Strahlungsrichtungen, wie Strombäuche auf der ganzen Antenne vorhanden sind. Zwischen den gemessenen Strahlungsdiagrammen und den nach den Abrahamschen Gleichungen berechneten Strahlungskurven ergibt sich in bezug auf die Richtung der Strahlungsäste eine sehr gute Übereinstimmung. Für die Amplitude der in den einzelnen Richtungen ausgestrahlten Energie ergibt sich dagegen zunächst eine Abweichung zwischen Rechnung und Messung. Der Grund dafür liegt darin, daß man bisher bei der Rechnung stets voraussetzte, daß die Stromamplitude in den einzelnen Schwingungsbäuchen auf der Antenne denselben Wert hat. In Wirklichkeit wird aber die Stromamplitude in dem Strombauch, an dem die Erregung durch den Sender stattfindet, wesentlich größer sein als in den benachbarten Strombäuchen. Berücksichtigt man dies in der Rechnung, so stimmen auch hinsichtlich der Amplitude die in den einzelnen Richtungen ausgesandten Energiemengen mit den gemessenen Werten überein.

3. In verschiedenen Fällen wird durch Einschaltung von Spulen die Strahlung einzelner Schwingungsbäuche auf der

Antenne verhindert und dadurch ein besonderes Strahlungsdiagramm erzielt, das ebenfalls mit den rechnerischen Ergebnissen übereinstimmt.

4. Für die Praxis sind die erhaltenen Ergebnisse insofern von Wert, als man heute bei der drahtlosen Telegraphie über große Entfernungen mit Erfolg kurze Wellen unter 100 m Wellenlänge verwendet. Durch Erregung der Sendeantenne in Oberschwingungen ist man in der Lage, den größten Teil der ausgestrahlten Energie nicht wie bisher bei den langen Wellen senkrecht von der Antenne, also parallel zur Erdoberfläche, sondern unter einem mehr oder weniger spitzen Winkel gegen die Antenne und somit schräg nach oben auszusenden, und dadurch die Strahlung von vornherein in Höhen zu schicken, die für die Ausbreitung kurzer Wellen besonders geeignet sind.

(Eingegangen 7. Januar 1926)

4. *Über den Widerstand von Kugeln; von H. Liebster¹⁾*

Der Widerstand, der sich einer sehr langsamen Bewegung einer Kugel durch ein unendlich ausgedehntes, zähes Medium entgegenstellt²⁾, ist von Stokes und Oseen³⁾ berechnet worden. Stokes löste die hydrodynamischen Differentialgleichungen für dies Problem unter Vernachlässigung aller quadratischen Glieder, Oseen wies nach, daß die Bewegungen des Mediums von Stokes nur in der Nähe der Kugel richtig berechnet sind.

Es dürfen quadratische Glieder von der Form $u \frac{\partial u}{\partial x}$, die halbquadratische genannt werden, nicht vernachlässigt werden. Oseen führte die Rechnung unter Berücksichtigung dieser Glieder durch.

Zur Prüfung ihrer Theorien dienten bisher vorwiegend Messungen von Arnold.⁴⁾ Er hat den Widerstand gemessen, den die Kugeln zu überwinden haben, wenn sie längs der Achse eines Zylinders fallen. Für Reynoldssche Zahlen unter 0,05, bei denen die Gleichungen beider Autoren praktisch dieselben Widerstandswerte ergeben, bestätigen die Versuche diese Gleichungen. Eine Entscheidung zwischen beiden Gleichungen bei größeren Reynoldsschen Zahlen herbeizuführen und ihre Gültigkeitsgrenzen zu bestimmen, sind die Versuche wenig geeignet, da die Genauigkeit der Messungen mit zunehmender Geschwindigkeit geringer wird. Weiterhin hat Allen⁵⁾ bei den Reynoldsschen Zahlen von 0,2 bis

1) Auszug aus einer Dissertation, Leipzig 1923. Vorläufige Veröffentlichung Phys. Zeitschr. 25. S. 670. 1924.

2) Literaturzusammenstellung bei Weyssenhoff, Ann. d. Phys. 62. S. 1. 1920.

3) C. W. Oseen, Arkiv f. math., astr. o. fys. Nr. 6. S. 75. 1910; Nr. 9. S. 1. 1913.

4) H. D. Arnold, Phil. Mag. 22. S. 755. 1911.

5) H. S. Allen, Phil. Mag. 50. S. 323. 1900.

10 Versuche mit Luftblasen in Wasser zur Messung des Widerstandes von Kugeln gemacht. Diese Versuche streuen sehr in ihren Werten. Es fehlt auch noch der Nachweis, daß sich hier Luftblasen wie feste Körper verhalten.

Der Widerstand bei mittleren Geschwindigkeiten, d. h. bei den Reynoldsschen Zahlen bis 1000, war auch schon von Allen gemessen worden. Hier hatte er Bernsteinkugeln verwendet. Es fehlte aber noch der Anschluß dieser Messungen sowohl nach höheren als nach geringeren Reynoldsschen Zahlen hin. Für die großen Reynoldsschen Zahlen (über 1000) liegen eine Reihe Arbeiten vor, die gut untereinander übereinstimmen. Es erschien daher wünschenswert:

1. Neue Experimente anzustellen, aus denen sich die Gültigkeitsbereiche der theoretischen Gleichungen ersehen ließen.

2. Die Widerstände ohne größere Lücken bis zur Reynoldsschen Zahl 1000 zu messen.

Weiterhin vergrößert sich der Widerstand, wenn die Kugel in der Nähe einer Wand fällt. Zu den Theorien, die hierüber in verschiedenen Abhandlungen erschienen sind, fehlten noch die experimentellen Bestätigungen. Es war daher:

3. Der Widerstand der Kugel beim Fall längs einer nahen Wand zu bestimmen.

Ferner haben Schiller und Döge¹⁾ und F. S. Schmidt²⁾ beim Beginn der Fallbewegung, solange die Kugel noch beschleunigt fiel, verhältnismäßig regelmäßige Schwankungen der Geschwindigkeit beobachtet. Es war die Frage zu klären:

4. Ob im weiteren Verlauf der Bewegung die Geschwindigkeit konstant wird oder nach irgendwelchen Gesetzmäßigkeiten um einen Mittelwert schwankt.

Die Versuchsanordnung

Es gibt zwei Möglichkeiten, den Widerstand fester Körper in widerstehenden Medien zu bestimmen. Einmal bewegt man den festen Gegenstand durch das ruhende Medium, das andere Mal hat man ruhende Körper in einem gleichmäßig bewegten

1) L. Schiller u. A. Döge, Leipz. Ber. **64**. S. 13. 1912.

2) F. Sigismund Schmidt, Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln, Diss. Leipzig 1919.

Medium. Bei der ersten Anordnung kann man als bewegende Kraft die Schwere oder den Auftrieb nehmen, die durch das Volumen des Körpers und die Dichtedifferenz gegeben sind. Widerstand und bewegende Kraft sind dann einander gleich, wenn die Geschwindigkeit konstant ist. Diese Methode hat den Vorteil, daß jegliche Zusatzwiderstände an Aufhängungen und dergl. wegfallen. Nachteilig ist; daß man immer prüfen muß, ob die Endgeschwindigkeit praktisch erreicht ist. Bei gegebener Versuchsanordnung dieser Art ist gewöhnlich der Geschwindigkeit eine obere Grenze gesetzt, da größere Endgeschwindigkeiten auch erst nach einem längeren Fallweg erreicht werden.

Bei der anderen Anordnung muß die Kugel fest aufgehängt werden. Der Widerstand wird aus den Kräften bestimmt, die den Körper in seiner Ruhelage halten. Die Zeit des Versuches ist hier unbeschränkt, so daß die Erreichung des Endzustandes der Bewegung sichergestellt ist. Dagegen muß man auf den Turbulenzzustand des strömenden Mediums und die örtliche und zeitliche Konstanz seiner Bewegung achten.

Die Versuche haben bisher bei beiden Anordnungen zu denselben Resultaten geführt. Es besteht jedoch ein prinzipieller Unterschied zwischen ihnen. Die Geschwindigkeit des Gegenstandes ist, wie später gezeigt wird, bei größeren Reynoldsschen Zahlen nicht konstant, wenn die erste Anordnung gewählt wird. Sie schwankt um einen Mittelwert. Außerdem kommen geringe Richtungsänderungen vor. Die Strömung um den Gegenstand unterliegt zeitlichen Schwankungen. Bei der zweiten Anordnung wird erzwungen, daß die Geschwindigkeit des Gegenstandes gegen unendlich ferne Teile des Mediums konstant ist. Es gibt aber in dem widerstehenden Medium auch in diesem Falle um den Gegenstand herum Abweichungen von dem stationären Strömungszustand.¹⁾ Diese Störungen können aber auf den festliegenden Gegenstand nicht zurückwirken wie auf einen frei beweglichen. Es ist also damit zu rechnen, daß in irgendwelchen Fällen beide Versuchs-

1) Der Strömungszustand kann nur dann als stationär angesehen werden, wenn das Koordinatensystem in die Kugel verlegt ist. In diesem Sinne ist auch im folgenden das Wort „stationär“ gebraucht.

arten merklich verschiedene Resultate geben, wenn auch bei Kugeln sich bisher noch keine meßbaren Unterschiede gezeigt haben.

Bei den vorliegenden Versuchen wurde nur die erste Anordnung verwendet. Als Versuchskörper dienten fast immer Stahlkugeln, nur in drei Fällen Bleikugeln. Die im Handel käuflichen Kugellagerkugeln waren genügend kugelförmig. Sie wurden mit einem Komparator von Zeiss ausgemessen. Da die Oberfläche der Kugeln spiegelte, war bei einer einzelnen Kugel der Rand unter dem Komparator nicht erkennbar. Daher wurden zur Messung drei Kugeln gleicher Größe nebeneinander gelegt. Die gegenseitigen Spiegelungen an den Berührungsstellen auf nebeneinanderliegenden Kugeln sind völlig symmetrisch. Daher läßt sich die Berührungsstelle mit Bestimmtheit angeben und die mittlere Kugel von Berührungsstelle zu Berührungsstelle gut messen. Die Bleikugeln¹⁾ waren nicht exakt kugelförmig. Es scheint aber, als ob die kleinen Abweichungen von der Kugelgestalt keinen wesentlichen Einfluß auf den Widerstand, den die Kugel erfährt, haben.

Die Verwendung kleiner schwerer Stahlkugeln hat folgende Vorteile: Da die Kugeln klein sind, ist das Verhältnis von Kugelradius und Abstand des Kugelmittelpunktes von der Gefäßwand klein. Damit werden auch die Wirkungen der Wände klein. Größere Reynoldssche Zahlen wurden durch geringere Werte der Zähigkeit des Mediums erreicht. Angenehm waren die großen Geschwindigkeiten, die von den Stahlkugeln bald erreicht wurden. Da geringe lokale Strömungen in einem großen Wasserbehälter, wie er auch verwendet wurde, nur schwer zum völligen Verschwinden zu bringen sind, mußte die Geschwindigkeit der Kugeln schon so groß sein, daß die Strömungen keine Korrekturen verursachten.

Als widerstehende Medien wurden Glyzerin, Zuckerlösungen und Wasser verwendet. Die Zähigkeiten dieser Substanzen wurden relativ gegen Wasser nach Poiseuille gemessen.

Die Gefäße, die zur Verwendung kamen, hatten die inneren

1) In der Tab. 1, S. 548, sind die Versuche mit Bleikugeln an dem angegebenen spezifischen Gewicht 11,2 erkennbar.

Abmessungen $8 \times 8 \times 20 \text{ cm}^3$ und $30 \times 30 \times 150 \text{ cm}^3$, sie hatten an den Seiten Glasfenster.

Zur genaueren Analyse des Falles wurde eine kinemographische Registrierung gewählt.¹⁾ Mit einer Bogenlampe wurde eine weiße Fläche hinter dem Gefäß erleuchtet. Die fallende Kugel hob sich dunkel gegen den hellen Hintergrund ab, gleichgültig, ob die Kugel blank oder schwarz mattiert war. Auf dem negativen Film erschien die Kugel hell weiß gegen dunklen Hintergrund. Zur Zeitmarkierung wurde ein rotierendes Zifferblatt mit feststehendem Zeiger mit aufgenommen. Es genügte, daß ein Zehntel des Randes des Zifferblattes mit abgebildet wurde, man konnte dann infolge entsprechender Kennzeichnung der Zehntel schon erkennen, vor welchem Felde der Einteilung der Zeiger stand. Das Zifferblatt war in 200 Felder (Skalenteile) geteilt, die Ablesegenauigkeit betrug ein Zehntel Skalenteil. Die ersten Versuche wurden mit einem Apparat gemacht, der von der Firma Nitsche in Leipzig freundlichst zur Verfügung gestellt war. Objektiv: Zeiss Tessar 1:3,5, $f = 7,5$. Später wurde ein Apparat von der Firma Ernemann, Aufnahmeapparat Modell A, verwendet, den die Helmholtzgesellschaft geliehen hatte.²⁾ (Objektiv Ernemann, Anastigmat „Ernon“ 1:3,5, $f = 8 \text{ cm}$.) Die Geschwindigkeit der Aufnahme betrug 20–40 Bilder in der Sekunde, der Abstand Apparat-Gefäß 60 bis 200 cm, die Verkleinerung 1:7 bis 1:16.

Die Bilder wurden mit dem Komparator von Zeiss ausgemessen. Die unregelmäßigen Kornbildungen der photographischen Schicht und Verzerrungen der Bilder beim Entwickeln führten dabei zu Fehlern. Die Ränder der Gegenstände waren bei der Vergrößerung auf den Bildern unscharf. Es war daher günstiger, das Fadenkreuz des Komparators auf die Kugelmittle einzustellen, die sich recht gut abschätzen ließ. Es wurde auf dem Film der Abstand der Kugel von

1) Vgl. auch P. Hirsch, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 3. S. 93. 1923, der eine ähnliche Apparatur zu Widerstandsmessungen verwendet hat.

2) Für die Überlassung der Apparate sei auch an dieser Stelle gedankt.

einer horizontalen Marke gemessen. Diese Vergleichsmarke¹⁾ ließ sich noch besser einstellen, als der Mittelpunkt der Kugel, denn man konnte einen Faden des Fadenkreuzes in seiner ganzen Länge auf die Mittellinie der strichförmigen Marke rücken. Da auf dieser langen Strecke die Unregelmäßigkeiten der Kornbildung nicht mehr ins Gewicht fielen, war eine strichförmige Marke günstiger als eine punktförmige. Die Geschwindigkeit wurde im allgemeinen aus dem ersten Bild, auf dem die Endgeschwindigkeit erreicht war, und dem letzten einer Serie errechnet. Es wurde bestimmt, welche Zeit zwischen den zusammengekommenen Bildern verstrichen war, welchen Weg die Kugel während dieser Zeit zurückgelegt hatte, und der Quotient berechnet. Bisweilen machte es sich jedoch nötig, die Geschwindigkeit aus allen Bildern zu ermitteln. Sie wurde dabei wie oben aus dem ersten und letzten, zweiten und vorletzten Bild errechnet usw. Aus den einzelnen Werten der Geschwindigkeit wurde dann der Mittelwert gebildet, indem man jedem Wert ein Gewicht beilegte, das der Weglänge proportional war, die zu seiner Errechnung gedient hatte.

Die Versuchsergebnisse wurden in dimensionslosen Größen aufgetragen. Es bedeuten:

- d = Durchmesser der Kugel,
- v = Endgeschwindigkeit,
- ρ = Dichte des Mediums,
- η = Zähigkeit des Mediums,
- W = Widerstand,
- ρ_1 = Dichte der Kugeln.

Dann sind $R = \frac{d \cdot \rho \cdot v}{\eta}$, die Reynoldssche Zahl, und $\psi = \frac{8W}{\pi \rho d^2 v^2}$, die Widerstandszahl, unsere dimensionslosen Koordinaten. Die Abhängigkeit des Widerstandes W von d , v , η , ρ und ρ_1 , die wir suchen, läßt sich durch die Abhängigkeit der Größe ψ von der Reynoldsschen Zahl R angeben.

1) Als solche Marke läßt sich nicht der Rand des Bildes verwenden. Da der Apparat während der Aufnahme nicht ganz ruhig steht, verschiebt sich der Rand. Die horizontalen Marken wurden daher auf dem Glasfenster des Troges angebracht. Ebenso bei den Bestimmungen der seitlichen Schwankungen vertikale Marken, vgl. P. Hirsch a. a. O.

Beobachtungsergebnisse

Die gemessenen Werte von R und ψ sind in Tab. 1 neben den Werten von d , ρ , ρ_1 , η und v verzeichnet. ψ ist in Abhängigkeit von R in Fig. 1 in logarithmischen Koordinaten aufgetragen (gekennzeichnet durch stehende Kreuze). Die Punkte liegen sehr verstreut, soweit es sich um Reynoldssche Zahlen über 500 handelt. Diese Versuche sind in dem

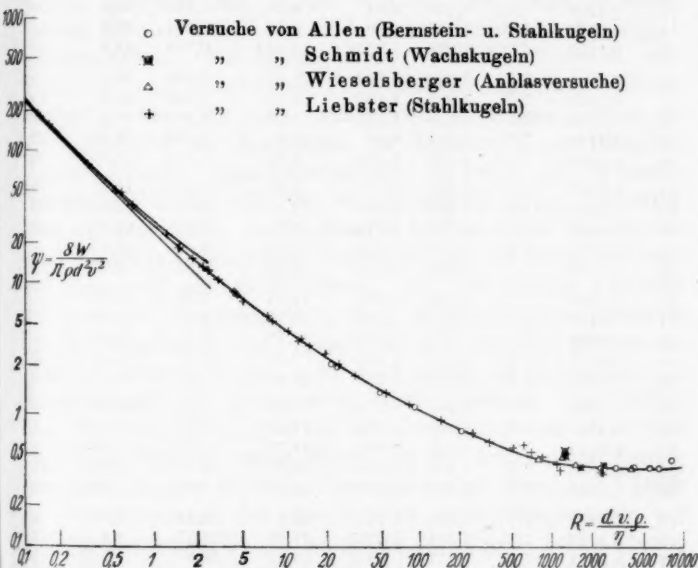


Fig. 1

großen Gefäß, das die Ausmaße $30 \times 30 \times 150 \text{ cm}^3$ hatte, gemacht. Bei dieser langen Fallstrecke von 150 cm bewirkten die Abweichungen der Fallrichtung von der Vertikalen, daß sich die Kugeln häufig von der Mitte des Gefäßes erheblich entfernten. Geschieht diese Entfernung in der Richtung der optischen Achse des kinematographischen Apparates, so wird die Geschwindigkeit falsch berechnet. Denn die Bildverkleinerung, die aus der Entfernung der Mittellinie des Gefäßes vom Aufnahmeapparat berechnet wurde, stimmt dann nicht mehr

Tabelle 1

Nr.	Kugel		Flüssigkeit		Geschw. cm/sec	R	ψ	Bildersahl
	Durch- messer cm	Dichte	Dichte	Zähig- keits- dichte				
1	0,1503	7,77	1,225	2,66	2,402	0,1355	182,5	13
2	0,0961	7,77	1,228	1,235	2,058	0,160	158,5	36
3	0,1988	7,77	1,225	2,64	4,20	0,316	78,8	16
4	0,3179	7,77	1,258	4,09	6,57	0,511	49,8	42
5	0,1503	7,77	1,228	1,235	4,082	0,566	48,4	33
6	0,0961	7,77	1,228	0,649	38,35	0,568	45,5	—
7	0,1510	7,77	1,225	1,160	5,23	0,681	38,6	45
8	0,1988	7,77	1,228	1,235	7,73	1,242	23,2	19
9	0,4746	7,77	1,258	4,09	13,2	1,530	18,40	18
10	0,1988	7,77	1,225	1,160	8,71	1,492	18,35	36
11	0,1505	7,77	1,228	0,649	8,30	1,927	15,21	28
12	0,1915	11,20	1,226	1,030	12,47	2,32	13,12	20
13	0,0961	7,77	1,288	0,272	7,16	2,53	12,35	17
14	0,2114	11,20	1,226	1,020	14,50	3,005	10,67	—
15	0,3179	7,77	1,240	1,292	16,02	3,94	8,54	12
16	0,1988	7,77	1,228	0,649	12,87	3,94	8,36	15
17	0,3117	7,77	1,228	1,235	16,13	4,07	8,35	16
18	0,2388	11,20	1,226	1,020	17,78	4,16	8,05	—
19	0,3117	7,77	1,225	1,160	17,41	4,67	7,18	13
20	0,3937	7,77	1,228	1,235	22,22	7,07	5,66	12
21	0,1503	7,77	1,288	0,271	13,48	7,69	5,17	16
22	0,4746	7,77	1,240	1,292	27,50	10,10	4,32	7
23	0,3173	7,77	1,228	0,649	24,75	12,10	3,605	6
24	0,1023	7,77	1,230	0,110	13,73	12,77	3,765	21
25	0,1988	7,77	1,288	0,270	19,83	14,61	3,330	12
26	0,6363	7,77	1,240	1,292	38,9	19,18	2,895	4
27	0,1023	7,77	1,204	0,0735	17,35	24,17	2,415	13
28	0,0961	7,77	1,177	0,0554	18,80	32,6	1,990	14
29	0,1510	7,77	1,204	0,0735	26,97	55,4	1,485	19
30	0,1503	7,77	1,177	0,0552	30,38	82,7	1,196	9
31	0,1988	7,77	1,177	0,0553	40,15	144,3	0,903	11
32	0,1025	7,77	1,000	0,01445	35,3	250,0	0,727	8
33	0,1023	7,77	1,000	0,01159	38,2	337,5	0,622	15
34	0,1506	7,77	1,000	0,0144	48,7	509	0,563	6
35	0,1506	7,77	1,000	0,0117	47,5	611	0,590	9
36	0,1023	7,77	0,994	0,00717	41,7	696	0,527	11
37	0,1023	7,77	0,987	0,00536	43,8	844	0,481	12
38	0,1981	7,77	1,000	0,01170	64,3	1090	0,423	8
39	0,1981	7,77	1,000	0,01170	67,9	1148	0,379	9
40	0,3179	7,77	1,000	0,01170	87,5	2380	0,368	10
41	0,3179	7,77	1,000	0,01170	88,4	2402	0,360	8

für die Bahn der Kugel. Daher sind die angegebenen Werte mit großen Reynoldsschen Zahlen nicht so genau.

Die experimentelle Kurve krümmt sich von dem Gebiete der Reynoldsschen Zahlen, in dem das Stokessche bzw. Oseensche Gesetz gilt, bis zu dem Gebiete, wo ψ konstant ist, und der Widerstand sich mit dem Quadrat der Geschwindigkeit ändert, stetig. Versuche, die Allen¹⁾ mit Bernsteinkugeln gemacht hat, liegen zwischen den Reynoldsschen Zahlen 20 und 220. Sie sind durch Kreise in der Fig. 1 gekennzeichnet. Sie geben ebenso wie die Versuche von Schiller und Döge²⁾ an Pilotballonen den Gang unserer Kurve wieder. Mit den vorliegenden Messungen von ψ ist der Anschluß an Messungen bei höheren Reynoldsschen Zahlen erreicht. Ohne Unstetigkeiten schließen sich an unsere Versuche die Versuche von Wieselsberger³⁾ im Luftstrom und die von Allen an Stahlkugeln in Wasser an. Einige von den Wieselsbergerschen Versuchen sind in Fig. 1 mit eingetragen und mit Δ bezeichnet. Die Allenschen Versuche haben wieder das Zeichen \circ . Nach Wieselsberger stimmen die Allenschen Versuche nicht zu der von ihm gefundenen Kurve. Diese Differenz muß wohl auf einem Fehler bei der Umrechnung der Allenschen Werte beruhen. Die Arbeit von F. S. Schmidt⁴⁾ gibt für zwei Punkte zwischen $R = 1200$ und $R = 1300$ zu große Werte für ψ , drei weitere Punkte stimmen dagegen recht gut (gekennzeichnet durch \otimes). Dazu ist zu bemerken, daß der Auftrieb seiner Wachskugeln bei den beiden ersten Fällen besonders gering war. Daher können die Abweichungen dieser beiden Versuche wohl auf Meßfehler zurückgeführt werden.

In der Fig. 1 sind außer den experimentellen Daten und einer durch sie gezogenen Interpolationskurve noch zwei weitere Kurven gezeichnet. Die eine gibt das Stokessche Gesetz

1) S. Allen, a. a. O.

2) L. Schiller u. A. Döge, a. a. O. Diese Versuche lassen sich nur angenähert berechnen, da die Temperatur der Luft nicht angegeben ist. Sie sind in der Fig. 1 nicht eingetragen.

3) C. Wieselsberger, Phys. Zeitschr. 23. S. 219. 1922.

4) F. S. Schmidt, a. a. O.

wieder, das in unseren dimensionslosen Größen geschrieben die Form annimmt

$$\psi = \frac{24}{R}.$$

Die zweite Kurve zeigt die Abhängigkeit des Widerstandes von Kugeln in Flüssigkeiten, wie sie Oseen¹⁾ unter Berücksichtigung der halbquadratischen Glieder der hydrodynamischen Differentialgleichungen berechnet. Auch die Oseensche Gleichung läßt sich als eine Gleichung zwischen den dimensionslosen Koordinaten ψ und R schreiben. Sie lautet

$$\psi = \frac{24}{R} \left(1 + \frac{3}{16} R \right).$$

Beide Gleichungen beziehen sich auf ein räumlich unendlich ausgedehntes Medium. Die Versuche sind aber in einem begrenzten Raum gemacht. Es lassen sich an den experimentellen Widerstandswerten Korrekturen anbringen, um sie auf ein unendliches Medium umzurechnen. Auch diese sollen diskutiert werden. Sie sind von Ladenburg²⁾ und Faxén³⁾ berechnet worden. Sie lösen die hydrodynamischen Gleichungen — Ladenburg ohne die quadratischen Glieder, Faxén mit den von Oseen beibehaltenen halbquadratischen — mit anderen Grenzbedingungen als Stokes und Oseen.⁴⁾ Bei diesen ist die Geschwindigkeit des Mediums in unendlicher Entfernung von der bewegten Kugel Null. Jene haben unter der Voraussetzung gerechnet, daß die Kugel längs der Achse eines unendlich langen Zylinders fällt. Dabei ist die Geschwindigkeit des Mediums an den Zylinderwandungen gleich Null.

Der Widerstand in einem Zylinder von dem Durchmesser ζ errechnet sich nach Ladenburg nach der Gleichung:

$$W = 3\pi d \eta v \left(1 + 2,4 \frac{d}{\zeta} \right). \quad 5)$$

1) C. W. Oseen, Ark. f. math. astron. o. fys. 6. S. 75. 1910; 9. S. 1. 1913.

2) A. Ladenburg, Ann. d. Phys. 23. S. 477. 1907.

3) H. Faxén, Einwirkung der Gefäßwände auf den Widerstand gegen die Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit. Diss. Upsala 1921.

4) Die Annahme, daß an der Oberfläche der Kugel das Medium fest haftet, und daher die Geschwindigkeit relativ zur Kugel null ist, ist in allen Fällen beibehalten.

5) Es sei bemerkt, daß auch d/ζ dimensionslos ist.

Wir führen die obigen dimensionslosen Größen R und ψ ein und formen die Gleichung um:

$$\frac{24}{R} = \frac{\psi}{1 + 2,4 \frac{d}{\zeta}}.$$

$\frac{24}{R}$ ist aber der Widerstandskoeffizient für ein unendlich ausgedehntes Medium, wenn wir nach Stokes rechnen. Faxén gibt für dieselben Verhältnisse an

$$W = \frac{3\pi d \eta v}{1 - \frac{3}{16} \frac{d \varrho v}{\eta} - \frac{d}{\zeta} L \left(\frac{\zeta \varrho v}{4\eta} \right) + \frac{d^3}{\zeta^3} \cdot 2,09}.$$

L ist eine von ihm für einzelne Werte des Arguments numerisch berechnete und dazwischen graphisch interpolierte Funktion. Wir formen dies wieder um:

$$\frac{24}{R \left(1 - \frac{3}{16} R \right)} = \psi \frac{\left[1 - \frac{3}{16} R - \frac{d}{\zeta} L \left(\frac{\zeta}{4d} \cdot R \right) + \frac{d^3}{\zeta^3} \cdot 2,09 \right]}{1 - \frac{3}{16} R}.$$

$\frac{24}{R \left(1 - \frac{3}{16} R \right)}$ ist der Widerstandskoeffizient, der aus der Gleichung von Faxén für unendlich großes ζ folgt. Dieser stimmt mit dem oben genannten Widerstandskoeffizienten von Oseen

$$\psi = \frac{24}{R} \left(1 + \frac{3}{16} R \right) \text{ bis auf Glieder zweiter Ordnung überein.}^1)$$

Bei den vorliegenden Versuchen war der Querschnitt des Gefäßes quadratisch. Für diesen Fall gibt es bisher keine Widerstandsberechnungen. Wollte man die für den Zylinder vorhandenen Gleichungen anwenden, so müßte man den quadratischen Trog durch einen Zylinder von gleicher Wirkung ersetzen. Als solcher wurde der Zylinder gleichen Querschnitts

1) In der vorläufigen Veröffentlichung (a. a. O.) ist nach der Oseen'schen Gleichung auf unendliches Medium umgerechnet.

$$\frac{24}{R} \left(1 + \frac{3}{16} R \right) = \psi \left[1 - \frac{3}{16} R - \frac{d}{\zeta} L + \frac{d^3}{\zeta^3} \cdot 2,09 \right] \left[1 + \frac{3}{16} R \right].$$

Für Reynoldssche Zahlen, die klein gegen 1 sind, müssen beide Rechnungsarten dasselbe Resultat geben. Die Verschiebung der Zahlenpaare (experimentelle und theoretische Werte) ist bei Annäherung an $R = 1$ und darüber in diesen verschiedenen Rechnungsarten begründet.

angenommen und auf diesen die Gleichungen von Ladenburg und Faxén angewendet.

Der Durchmesser des Zylinders, mit dem gerechnet wurde, war 9,03 cm, da unser Gefäß 64 qcm Querschnitt hatte.

Auf die Berücksichtigung der Nähe des Bodens und der freien Flüssigkeitsoberfläche wird wohl besser verzichtet. Diese

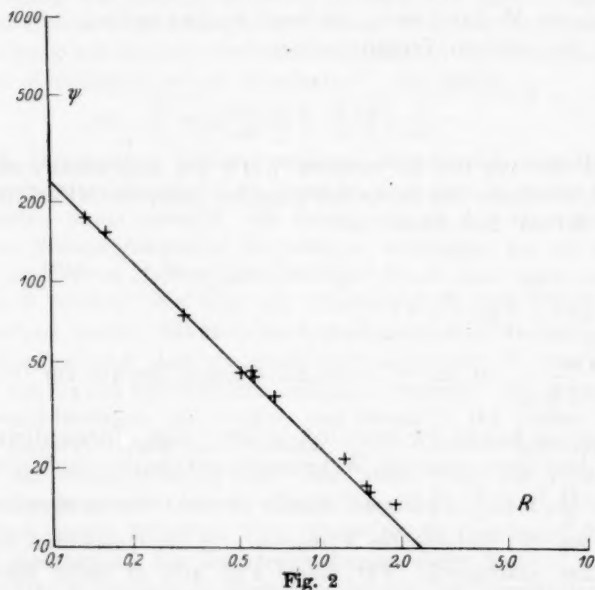


Fig. 2

Korrektur ließe sich nach einer Rechnung von Ladenburg durchführen¹⁾, der den Widerstand von Kugeln zu berechnen versuchte, die zwischen zwei parallelen festen Ebenen senkrecht zu diesen sich gleichmäßig bewegen. Gegen die Rechnung Ladenburgs sind Bedenken geäußert worden. Ihre Anwendung hier ist auch nicht ohne weiteres möglich. Der Boden unseres Gefäßes und die freie Flüssigkeitsoberfläche sind nicht unendlich groß, außerdem gilt für die freie Oberfläche eine andere Grenzbedingung. Die Korrekturen wären

1) Vgl. die in der vorläufigen Veröffentlichung angegebenen Werte.

wohl auch im allgemeinen so klein, daß sie keinen großen Einfluß auf das Resultat hätten.

Wir geben in Tab. 2 und Figg. 2 und 3 die Resultate der Versuche, die nach Ladenburg bzw. Faxén auf ein unendliches Medium umgerechnet sind. ψ_0 ist in der Tab. 2 der experimentell gefundene, unkorrigierte Wert. Bis $R = 0,6$

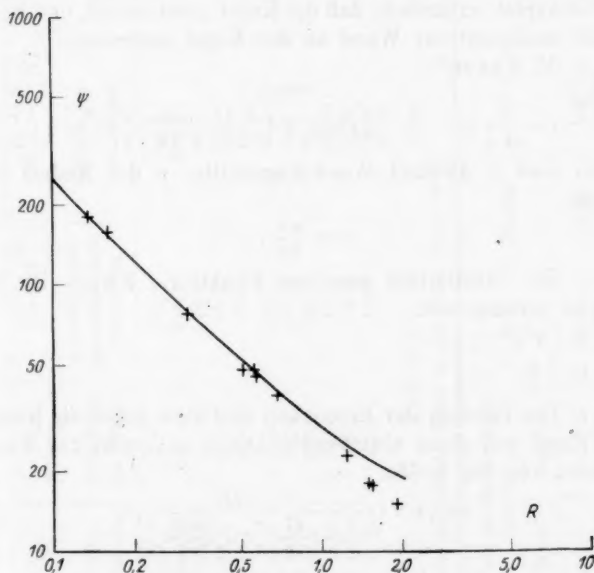


Fig. 3

liegen die Punkte nahe bei den theoretischen Kurven, ohne daß man der einen den Vorzug geben könnte. Bei höheren Reynoldsschen Zahlen dagegen liegen die Punkte unterhalb der Oseenschen und oberhalb der Stokesschen Kurve.

Versuche in unmittelbarer Nähe einer Wand

Diese Versuche sollen den Einfluß einer einzigen nahen Wand ergeben, wenn die Kugel parallel zu der Wand fällt. Es lagen drei theoretische Gleichungen zu diesem Problem vor.

1. H. A. Lorentz¹⁾

$$W_L = 3 \pi d \eta v \left(1 + \frac{9}{16} \frac{d}{2\zeta} \right).$$

2. J. Stock²⁾

$$W_{St} = 3 \pi d \eta v \left[\frac{1}{1 - \frac{9}{16} \frac{d}{2\zeta}} - \left(\frac{d}{4\zeta} \right)^3 \left(1 + \frac{9}{16} \frac{d}{2\zeta} \right) \right].$$

Er behauptet irrtümlich, daß die Kugel nicht rotiert, und keine Kräfte senkrecht zur Wand an der Kugel angreifen.

3. H. Faxén³⁾

$$W_F = \frac{3 \pi d \eta v}{1 - \frac{3}{4} r |\sigma| - \frac{9}{8} \frac{r}{2\zeta} \chi(\sigma \zeta) + \left(\frac{r}{2\zeta} \right)^3 - \frac{45}{16} \left(\frac{r}{2\zeta} \right)^4 + 2 \left(\frac{r}{2\zeta} \right)^5}$$

Dabei sind ζ Abstand Wand-Kugelmittle, r der Radius der Kugel

$$\sigma = \frac{q v}{2 \eta},$$

$\chi(\sigma \zeta)$ eine tabellarisch gegebene Funktion. Ferner ist bei Faxén vorausgesetzt

a) $\sigma^2 r^2 \ll 1.$

b) $\left(\frac{q}{2\zeta} \right)^6 \ll 1.$

c) Die Teilchen der Flüssigkeit sind klein gegen die Kugel. Die Kugel soll einen abstoßenden Druck senkrecht zur Wand erfahren von der Größe

$$\frac{9}{8} \pi r \eta v \sigma \cdot r \frac{\tau(\sigma \zeta)}{1 - \frac{27}{16} \frac{r}{\zeta} + \frac{1459}{384} \frac{r^3}{\zeta^2}}.$$

Dabei ist $\tau(\sigma \zeta)$ auch eine gegebene Funktion.

Die Kugel soll so rotieren, wie sie rotieren würde, wenn sie an der Wand herabrollte. Lorentz und Stock lehnen sich in ihren Rechnungen an Stokes, Faxén wieder an Oseen an.

Bei Vorversuchen wurde an Kugeln, an denen eine kleine Luftblase hing, die von Faxén geforderte Rotation der Kugel beobachtet.

Bei diesen Versuchen stellte sich aber auch heraus, daß infolge der abstoßenden Wirkung der Wand die Kugel sich

1) H. A. Lorentz, Abhandl. über theor. Phys. Leipzig 1907.

2) J. Stock, Crak. Anz. 1911 zitiert nach Faxén a. a. O.

3) H. Faxén, a. a. O.

Tabelle 3
Die abstoßende Kraft in der Nähe einer Wand

Nummer	R	$\frac{d}{\zeta}$	$\frac{d}{\zeta} L \left(\frac{\zeta}{4d} \cdot R \right)$	ψ_0 exper. unkorr.	$\psi = \frac{24}{R}$ Gleichung von Stokes	$\psi = \frac{\psi_0}{1 + 2,4 \frac{d}{\zeta}}$ exper. un- gerechnet nach Ladenburg	$\psi = \frac{24}{R \left(1 - \frac{3}{16} \frac{R}{\zeta} \right)}$ Gleichung von Oseen	$\psi = \frac{\psi_0}{1 - \frac{3}{16} \frac{R}{\zeta}}$ exper. umgerechnet nach Faxén
1	0,1355	0,0166	0,017	182,5	177,1	175,3	181,8	179,3
2	0,160	0,0106	0,007	158,5	150,0	154,7	154,7	157,2
3	0,316	0,0220	0,018	78,8	75,9	74,8	80,7	77,3
4	0,511	0,0352	0,023	49,8	47,0	45,9	52,0	48,5
5	0,566	0,0166	0,006	48,4	42,4	41,6	47,5	48,2
6	0,568	0,0106	0,002	45,5	42,2	44,3	47,3	45,4
7	0,681	0,0167	0,005	38,6	35,25	37,1	40,4	38,4
8	1,242	0,0220	0,004	23,2	19,31	22,05	25,2	23,1
9	1,492	0,0220	0,004	18,35	16,35	17,42	22,35	18,27
10	1,580	0,0525	0,014	18,40	15,68	16,33	22,00	18,02
11	1,927	0,0166	0,002	15,21	12,44	14,62	19,32	15,17

Nr.	ζ ¹⁾ cm	Wand- neigung	Neigung der Fallrichtung gegen		$\tau (\sigma \zeta)$	Nenner	$\frac{9}{8} \pi r v \eta r \sigma$		Kraft	
			die Wand	das Lot					Faxén	Versuch
2	0,098	0,0260	0,0224	0,0036	0,989	1,185	0,0204	0,0170	0,0170	0,017
3	0,104	0,0116	-0,0007 ²⁾	0,0123	0,987	1,157	0,0219	0,0187	0,0187	0,042
7	0,152	0,0233	0,049	0,0184	0,877	1,167	0,238	0,179	0,179	0,195

1) Die weiteren Versuchsdaten vgl. in Tab. 4.

2) Das „-“ Zeichen bedeutet Entfernung von der Wand.

bald so weit von der Wand entfernte, daß der Einfluß gering war. Deshalb wurde die Wand etwas geneigt (1 bis 2 Grad). Im Endzustand der Bewegung hielten sich die senkrecht zur Wand gerichtete Komponente des Gewichts der Kugel und die abstoßende Kraft der Strömung das Gleichgewicht (vgl. Fig. 4). Dieser Gleichgewichtszustand wurde gewöhnlich nur angenähert

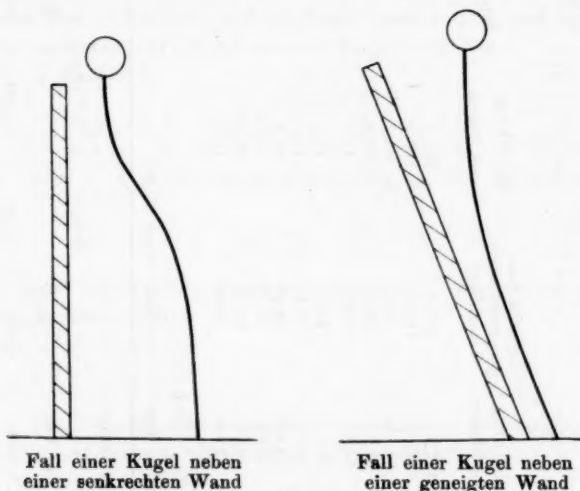


Fig. 4

erreicht, doch war die Entfernung von, bzw. Annäherung an die Wand so gering, daß mit parallelem Fallen gerechnet wurde. Schwierigkeiten bereiteten die Messungen des Wandabstandes. Der Meßfehler betrug 0,010 bis 0,015 cm bei einem Wandabstand von 0,1 bis 0,5 cm.

Zur Messung des zweiten Effektes, der Wandabstoßung, von Faxén, reichten die Versuchsmöglichkeiten nicht aus, die zur Verfügung standen. Es wird hierbei verlangt, daß $\frac{r^2}{\xi^2} \ll 1$, da das quadratische Glied der Gleichung für abstoßende Kräfte im Nenner noch nicht endgültig berechnet ist. Unter dieser Bedingung wird der Effekt aber sehr klein. Da die Bedingung in unserem Falle nicht eingehalten war, war zu erwarten, daß die Resultate nur der Größenordnung nach mit der Theorie

übereinstimmten. Tab. 3 gibt die berechneten Werte. Man beachte, daß bei 3 auch die Widerstandsbestimmung (Tab. 4) ein falsches Resultat gibt! Bei den nicht aufgeführten Versuchen war der Effekt zu klein. Auf die Veränderung des Widerstandes durch die Wandnähe wurde der größte Wert gelegt. Die Resultate sind in Tab. 4 gegeben. Die ersten Spalten sind die Versuchsdaten. $\frac{9}{8} \frac{r}{2\tau} \chi(\sigma \zeta)$ ist das Hauptglied der Entwicklung des Nenners in der Gleichung von Faxén, $\frac{3}{4} r \sigma$ ist das Korrektionsglied von Oseen. Es entspricht dem Glied $\frac{8}{16} R$, um das die Gleichung von Stokes durch Oseen erweitert ist (vgl. S. 550). Mit W_F ist der Widerstand nach Faxén bezeichnet, mit W_L und W_{st} der nach Lorentz und Stock. W ist der experimentelle Widerstand. Dieser ergibt sich als Differenz von Schwere und Auftrieb der Kugeln. Die Versuche mit einer größeren Zahl von Bildern sind geteilt, da sich im Laufe des Versuches der Abstand der Kugel von der Wand zu stark ändert. Innerhalb der Teile wurde mit konstantem Abstand gerechnet. Die Fehlergrenzen sind für W_F ermittelt.

Schon bei den kleinsten Kugeln ist W_L immer zu klein. Die Gleichung von Faxén gibt die Verhältnisse im ganzen am besten wieder. Die Reynoldssche Zahl der Versuche 10 und 11 liegt bei 1,7. Bei dieser Zahl sind auch ohne Wandnähe Abweichungen von den theoretischen Formeln gefunden.

Die Schwankungen der Geschwindigkeit im quasistationären Zustand

Die Flüssigkeitsbewegung um die Kugel bei den Reynoldsschen Zahlen, bei denen die Versuche gemacht wurden, ist, abgesehen von den Versuchen mit den kleinsten Reynoldsschen Zahlen, nur quasistationär. Mit Hilfe unserer kinemographischen Registrierung ließ sich für verhältnismäßig kurze Zeitabschnitte die mittlere Geschwindigkeit ermitteln. Es zeigten sich Schwankungen der Geschwindigkeit. Sie konnten aus Meßfehlern nicht erklärt werden. Die reinen Meßfehler setzen sich aus Fehlern in der Bestimmung des Weges und der Zeit zusammen. Für diese Fehler ließ sich wenigstens

Tabelle 4
Widerstände in der Nähe einer Wand

Nr.	$2r$	ϱ	η	ϑ	ζ	R	$\frac{9}{8} \frac{r}{2r} \chi(\sigma^{\circ})$	$\frac{3}{4} r \sigma$	Nenner	Zähler	W_F	W_L	W_{St}	W
1a	0,0961	1,228	1,380	1,91	0,163	0,163	0,139	0,0806	0,832	0,239	$0,288 \pm 0,013$	0,279	0,286	0,298
1b	0,0961	1,228	1,380	1,73	0,110	0,141	0,229	0,0264	0,748	0,214	$0,287 \pm 0,028$	0,267	0,282	0,298
2a	0,1023	1,225	1,212	2,16	0,109	0,223	0,237	0,0419	0,735	0,253	$0,344 \pm 0,023$	0,320	0,340	0,360
2b	0,1023	1,225	1,212	2,09	0,088	0,217	0,290	0,0406	0,689	0,246	$0,368 \pm 0,036$	0,326	0,356	0,360
3a	0,1023	1,225	1,200	2,17	0,105	0,226	0,236	0,0425	0,725	0,251	$0,346 \pm 0,027$	0,320	0,341	0,360
3b	0,1023	1,225	1,200	2,04	0,104	0,213	0,242	0,0401	0,721	0,287	$0,328 \pm 0,027$	0,302	0,324	0,360
4a	0,1503	1,226	1,510	3,69	0,116	0,449	0,294	0,0844	0,618	0,791	$1,280 \pm 0,155$	1,080	1,207	1,142
4b	0,1503	1,226	1,510	3,14	0,085	0,383	0,352	0,0720	0,503	0,673	$1,338 \pm 0,230$	0,972	1,150	1,142
5a	0,1503	1,228	1,362	4,16	0,156	0,563	0,191	0,1057	0,706	0,805	$1,139 \pm 0,075$	1,023	1,090	1,142
5b	0,1503	1,228	1,362	3,48	0,110	0,470	0,311	0,0883	0,593	0,674	$1,138 \pm 0,170$	0,934	1,058	1,142
6	0,1503	1,226	1,473	3,80	0,161	0,475	0,193	0,0893	0,721	0,796	$1,130 \pm 0,063$	1,005	1,068	1,142
7a	0,1510	1,225	1,188	4,67	0,159	0,728	0,170	0,136	0,696	0,789	$1,132 \pm 0,046$	1,000	1,064	1,160
7b	0,1510	1,225	1,188	4,40	0,146	0,685	0,196	0,128	0,678	0,744	$1,069 \pm 0,058$	0,960	1,032	1,160
8a	0,1510	1,225	1,200	5,30	0,280	0,816	0,068	0,153	0,750	0,907	$1,162 \pm 0,023$	1,045	1,066	1,160
8b	0,1510	1,225	1,200	5,41	0,312	0,807	0,056	0,156	0,789	0,924	$1,172 \pm 0,023$	1,050	1,065	1,160
9	0,1503	1,228	1,405	4,63	0,367	0,610	0,048	0,114	0,839	0,925	$1,101 \pm 0,028$	1,024	1,037	1,142
10a	0,1988	1,225	1,175	8,18	0,238	1,70	0,084	0,318	0,601	1,807	$3,00 \pm 0,053$	2,24	2,35	2,64
10b	0,1988	1,225	1,175	8,48	0,283	1,75	0,059	0,329	0,618	1,871	$3,06 \pm 0,053$	2,24	2,32	2,64
11a	0,1988	1,225	1,188	8,44	0,281	1,73	0,061	0,324	0,618	1,881	$3,05 \pm 0,053$	2,26	2,34	2,64
11b	0,1988	1,225	1,188	8,64	0,328	1,77	0,044	0,331	0,637	1,924	$3,07 \pm 0,053$	2,26	2,32	2,64
12	0,1988	1,226	1,492	7,55	0,339	1,23	0,075	0,340	0,637	2,115	$2,94 \pm 0,053$	2,46	2,52	2,64
13a	0,1988	1,226	1,568	7,43	0,373	1,15	0,051	0,231	0,734	2,18	$2,97 \pm 0,053$	2,51	2,56	2,64
13b	0,1988	1,226	1,568	7,46	0,406	1,15	0,044	0,216	0,740	2,19	$2,96 \pm 0,053$	2,50	2,53	2,64
14	0,1988	1,228	1,381	7,76	0,514	1,36	0,022	0,256	0,723	2,01	$2,78 \pm 0,053$	2,23	2,25	2,64

eine obere Grenze bestimmen. Bei Bilderserien, bei denen die zwischen zwei Bildern zurückgelegten Wege sehr klein, die Zeitdifferenzen dagegen groß sind, wird der errechnete mittlere Fehler der Geschwindigkeitsbestimmung im wesentlichen von Fehlern der Wegmessung, nur im geringeren Grade von der Zeitmessung und der natürlichen Schwankung herühren. Umgekehrt, wenn die Zeitdifferenzen klein und die Wege groß sind, wird der errechnete mittlere Fehler im wesentlichen von den Fehlern in der Zeitmessung herrühren.

Aus drei Serien, die den ersten Bedingungen genügten, ließ sich daher eine obere Grenze des mittleren Fehlers der Wegmessung ermitteln, aus sechs anderen Serien, die die anderen Bedingungen erfüllten, eine obere Grenze des mittleren Fehlers der Zeitmessung. Diese Grenzen betragen $4,8 \mu$ für die Wegmessung und $0,12$ Skalenteile für die Zeitmessung. Für die übrigen Serien wurde nach diesen Bestimmungen der zu erwartende prozentuale mittlere Fehler der Weg- und Zeitbestimmung ermittelt. Addieren wir diese beiden Fehler, d. h. rechnen wir mit dem ungünstigsten Fall, daß sich immer die

Tabelle 5

Versuch ¹⁾ Nr.	Mittlerer Fehler %		Mittlerer Fehler % der Geschwindigkeit	
	des Weges	der Zeit	errechnet	beobachtet
4	0,7	1,9	2,6	5,1
5	1,6	0,9	2,5	5,4
6	4,8	0,9	5,7	10,5
7	2,4	2,4	4,8	4,9
8	1,0	0,7	1,7	3,6
9	1,0	1,7	2,7	5,2
10	1,5	2,0	3,5	2,7
11	1,9	1,0	2,9	3,1
12	0,8	0,7	1,5	2,0
13	1,6	0,6	2,2	3,5
15	1,2	2,4	3,6	3,3
16	1,2	1,1	2,3	3,0
17	0,5	0,9	1,4	3,1
19	0,8	2,3	3,1	2,8
20	1,0	0,9	1,9	2,9
21	1,4	0,5	1,9	3,5

1) Die übrigen Versuche enthielten entweder zu wenig Bilder, so daß die Ermittlung der letzten Spalte nicht möglich war, oder sie sind zur Abschätzung der mittleren Fehler verwendet.

Fehler des Weges und der Zeit addieren und nie kompensieren, so bekommen wir für jede Serie eine obere Grenze für den mittleren prozentualen Fehler der Geschwindigkeit, der aus den Meßfehlern des Weges und der Zeit zu erwarten ist. In Tab. 5 sind die Resultate dieser Rechnungen gegeben, die letzte Spalte enthält die mittleren prozentualen Fehler, die

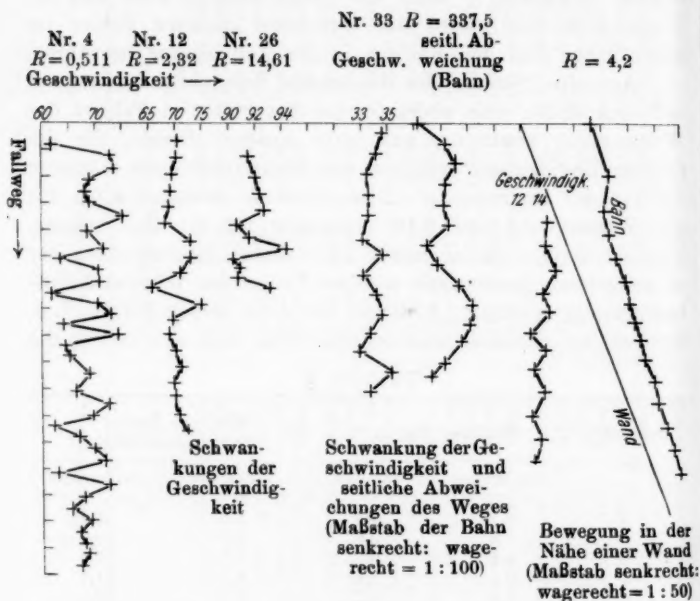


Fig. 5

direkt aus den Beobachtungen errechnet sind. Diese liegen fast durchweg über der oberen Grenze, die wir ermittelt haben. Damit ist erwiesen, daß Meßfehler für die vorhandenen Schwankungen nicht allein die Erklärung geben können. Es wurde versucht die Schwankungen als periodisch anzusehen. Es gelang aber weder die Perioden sicher abzuschätzen, noch eine Gesetzmäßigkeit für sie ausfindig zu machen, der sie sich auch nur mit einer geringen Annäherung unterworfen hätten. Einige Beispiele der Schwankungen gibt Fig. 5.

Diese Schwankungen traten aber nicht nur im Betrag der Geschwindigkeit auf, sondern auch in der Richtung. Um dies zu demonstrieren, wurden weiße, hell erleuchtete Tonkugeln in Wasser vor einem dunklen Hintergrund fallen gelassen und der Vorgang photographisch aufgenommen. Die Kugeln erschienen auf der Platte als schwarzes Band, an dem man die seitlichen Schwankungen beobachten konnte. Auch bei einigen Aufnahmen mit dem Kinematographen wurde derselbe Effekt durch Ausmessen der Bilder festgestellt.

Zur Frage der aus unseren Beobachtungen jedenfalls nicht zu erschließenden Periodizität ist noch folgendes zu bemerken.

F. S. Schmidt¹⁾ gelang es nachzuweisen, daß sich bei Reynoldsschen Zahlen über 1000 zu Beginn der Bewegung von der Kugel ein Wirbelring ablöst. Würden diesem ersten Ringe weitere folgen, so entstände eine Wirbelstraße. Unter welchen Bedingungen eine solche Wirbelstraße stabil ist, ist nicht bekannt. Die Tatsache, daß eine einfache Straße von Ringwirbeln labil ist, und die Erscheinungen an coaxialen Wirbelringen geben keinen Anhalt für die Existenz einer stabilen Wirbelanordnung hinter der Kugel. Dagegen kann man an aufsteigenden Luftblasen beobachten, daß sie in einer sehr regelmäßigen, fast sinusförmigen Bahn aufsteigen. In diesem Falle scheint eine gewisse stabile Wirbelanordnung vorhanden zu sein.

Auf der anderen Seite konnte Kármán²⁾ zeigen, daß im Gebiet, wo ψ konstant ist, an der Kugel zwei parallele Wirbel-fäden hängen. Sie haben entgegengesetzten Drehungssinn und verändern dauernd ohne Regelmäßigkeit ihre Lage. Sie üben entsprechend unregelmäßig Kräfte auf die Kugel aus, die senkrecht zur Bewegungsrichtung sind. Es ist einleuchtend, daß die auf diese Seitenkräfte zurückzuführenden seitlichen Bewegungen auch mit Geschwindigkeitsschwankungen in der Hauptbewegungsrichtung verbunden sind. In diesem Sinne erscheinen unsere Beobachtungen über die Geschwindigkeits-schwankungen, die zwischen $R = 0,5$ und 2500 gemacht sind, durchaus verträglich mit den Beobachtungen von Kármán im Gebiete $R > 1000$.

1) F. S. Schmidt, a. a. O.

2) Th. v. Kármán, Vorträge aus dem Gebiet der Äro- und Hydrodynamik, Berlin 1925.

Zusammenfassung

1. Es wurden mit einer kinematographischen Methode die Widerstände von Kugeln in Flüssigkeiten vom linearen bis zum quadratischen Widerstandsbereich bestimmt. Es ergab sich für die Abhängigkeit des dimensionslosen Widerstandskoeffizienten von der Reynoldsschen Zahl ein stetiger Verlauf.

2. Um einen Vergleich mit den Theorien von Stokes und Oseen zu ermöglichen, wurden die Widerstandswerte mit kleinen Reynoldsschen Zahlen nach Ladenburg und Faxén auf ein unendliches Medium umgerechnet. Dabei ergaben sich in beiden Fällen befriedigende Übereinstimmungen zwischen Theorie und Experiment.

3. Es wurden die Widerstände von Kugeln in der Nähe einer Wand gemessen. Die Gleichungen von H. A. Lorentz und J. Stock gaben zu kleine Werte, die Gleichung von Faxén dagegen für Kugeln bis zu 0,15 cm Durchmesser richtige Werte. Die Gleichung von Faxén für einen Druck senkrecht zur Wand wurde auch bestätigt.

4. Es wurde festgestellt, daß bei Reynoldsschen Zahlen über 0,5 Geschwindigkeit und Richtung um einen Mittelwert unperiodisch schwanken. Aus den Schwankungen ist zu schließen, daß hinter der Kugel keine stabile Wirbelanordnung herrscht, wie hinter einem Zylinder.

Die Versuche zu vorliegender Arbeit wurden im physikalischen Institut der Universität Leipzig gemacht. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. Schiller für die Anregung zu der Arbeit und den wertvollen Rat, mit dem er ihren Fortgang wesentlich gefördert hat, zu danken.

Greifswald im November 1926.

(Eingegangen 8. Januar 1926)

5. *Über die Intensitätsdissymmetrie beim
Wasserstoffstarkeffekt;
von Raimund Wierl*

(Münchener Dissertation)

(Hierzu Tafel X)

Inhalt: 1. Allgemeines. — 2. Die Versuchsanordnung. — 3. Die Ergebnisse. — 4. Zusammenfassung.

1. Allgemeines

Schon bei den ersten Mitteilungen über den neu entdeckten Effekt des elektrischen Feldes wies Johannes Stark¹⁾ auf eine merkwürdige Verschiedenheit der Intensitäten der langwelligen und kurzwelligen Linien des Aufspaltungsbildes hin. Ließ er Wasserstoffkanalstrahlen in Wasserstoffgas in der Richtung des Vektors des zerlegenden elektrischen Feldes verlaufend eintreten, so erschienen die langwelligen Komponenten intensiver als die kurzwelligen. Richtete er dagegen das Feld den Kanalstrahlen entgegen, so kehrte sich der Intensitätsunterschied um, indem nunmehr die kurzwelligen Komponenten intensiver als die langwelligen waren. Diese umkehrbare Unsymmetrie der Intensitäten gilt für die beiden zueinander senkrecht polarisierten, durch eine Wollastonplatte auseinander gelegten Schwingungsebenen des Kanalstrahllichtes. Die Bezeichnung senkrecht und parallel bezieht sich dabei auf die Lage des elektrischen Vektors des Lichtes zur Feldrichtung. Unabhängig von Stark und Kirschbaum stellte H. Wilsar²⁾ dieselbe Erscheinung an bewegten Wasserstoffteilchen fest. Genaue Schwärzungsmessungen ergaben dabei noch, daß das Intensitätsverhältnis bei beschleunigendem Feld (Eichschaltung des Feldes mit der Bewegungs-

1) J. Stark, Berliner Berichte, 20. November 1913.

2) H. Wilsar, Göttinger Nachrichten 1914.

richtung der Kanalstrahlen) stets größer ist als bei bremsendem Feld. Lunelund¹⁾ untersuchte die Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses vom Kathodenfall, also von der Geschwindigkeit der Teilchen. Er stellte für die p - und s -Komponenten eine Zunahme mit der Geschwindigkeit fest. Stark²⁾ gibt auch für die Heliumlinien einen Unterschied der Intensitäten der äußeren Komponenten an, der aber mit dem Feld nicht umkehrbar sei. Nun überwiegt beim Heliumleuchten die ruhende Intensität die bewegte. Diese Feststellung und die von Lunelund gefundene Spannungsabhängigkeit veranlaßten Stark, die umkehrbare Dissymmetrie den bewegten Kanalstrahlteilchen zuzuschreiben. Alle diese Beobachtungen gelten für den Quereffekt. Der Strahl verläuft dabei parallel zu den Feldlinien. Die Beobachtungsrichtung steht senkrecht zu Strahl- und Feldrichtung. Beim Längseffekt ist die Strahlrichtung senkrecht zu der durch Feld- und Beobachtungsrichtung gegebenen Ebene. Aus geometrischen Gründen treten dabei nur die senkrecht zum Feld schwingenden Komponenten und zwar unpolarisiert auf. Hier fehlt nun die Intensitätsdissymmetrie der äußeren Komponenten. Stark³⁾ gibt eine Deutung des umkehrbaren Unterschiedes der Intensitäten. Der Grundgedanke ist, daß bei Gleichfeld (die Bewegungsrichtung der Strahlen ist parallel dem Feldvektor) das Licht der langwelligen Linie auf der intensiver durch Stoß angeregten Atomseite (bei Stark auf der in die Geschwindigkeitsrichtung blickende Seite) emittiert wird. Bei der entgegengesetzten Feldschaltung ergibt sich daraus die intensivere kurzwellige Komponente. Niels Bohr⁴⁾ hat eine Auffassung angedeutet, die von Sommerfeld, Rubinowicz, Pauli auf Grund der Epstein-Schwarzschildschen Theorie des Starkeffekts weiter ausgebildet wurde. Die Theorie⁵⁾ kommt zu dem Ergebnis, daß langwellige Zerlegungskomponenten von Bahnübergängen herrühren, deren Anfangsbahnen mehr hinter dem Kern verlaufen, und umgekehrt. Diese Deutung ist der Orientierung

1) Lunelund, Ann. d. Phys. 45. S. 517. 1914.

2) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse, S. 39.

3) J. Stark, a. a. O. S. 102.

4) N. Bohr, Phil. Mag. 30. S. 405. 1915.

5) Vgl. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 4. Aufl. S. 407.

nach umgekehrt zu der von Stark gegebenen. Während dort die Anregungsstärke für die größere Intensität verantwortlich sein soll, ist bei Bohr die Störungsfreiheit maßgebend. Das beiden Meinungen Gemeinsame und für die folgende Untersuchung Bedeutsame ist, daß die Emissionszentren der langwelligen und kurzwelligen Komponenten auf verschiedenen Seiten des Atomkernes liegen.

2. Die Versuchsanordnung

Die Untersuchungen wurden an bewegten und ruhenden Wasserstoffteilchen im Quereffekt durchgeführt.

Das Ziel des ersten Teiles dieser Arbeit war die Beantwortung der Frage, ob die Dissymmetrie beim Starkoeffekt mit Recht nur den bewegten Teilchen zugeschrieben wird. Es kam also darauf an, im elektrischen Feld ausschließlich ruhendes Wasserstoffleuchten zu beobachten. Um das Wasserstoffgas zur Emission anzuregen, wird es mit Stickstoffkanalstrahlen beschossen. Damit kein Wasserstoff des Beobachtungsraumes durch den Kanal in den Entladungsraum gelangt und dort beschleunigt Anlaß zu bewegtem Wasserstoffleuchten gibt, muß die Kathode entsprechend dimensioniert sein. Reinliche Trennung zweier Gasräume ist zu erreichen durch einen langen und engen Kanal und durch die kräftige Saugwirkung einer im Kanal angreifenden Pumpe. Dementsprechend ist die verwendete Kathode ein zylindrischer Messingklotz von 8 cm Länge und $3\frac{1}{2}$ cm Durchmesser mit einer Kanalbohrung von 1,8 mm Durchmesser. Nahe dem unteren Rande mündet in den Kanal ein weites Messingrohr von 2 cm Durchmesser, an dem die Pumpleitung angesetzt ist. Die beiden Stirnflächen der Kathode sind mit Aluminiumplatten gedeckt. Der Kern ist für die Wasserkühlung eingedreht. Im Kanal wird mit einer Gaede-Diffusionspumpe aus Stahl gepumpt. Um die ganze Saugwirkung auch wirklich auszunützen, führt eine möglichst kurze Rohrleitung von über 3 cm Durchmesser zur Pumpe. Mit dieser Anordnung ergibt sich eine befriedigende Gastrennung von Entladungsraum und Beobachtungsraum. Auch für mehrere Hundertstel Millimeter Hg Wasserstoffdruck im unteren Raum bleibt die Röhre entladungsfrei.

Zur Untersuchung der Verhältnisse im abklingenden Strahl dient als Kathode ein $4\frac{1}{2}$ cm langer, wassergekühlter Messingklotz mit 3 mm Bohrung. An der dem Beobachtungsraum zugekehrten Stirnfläche ist eine Aluminiumscheibe von 1 mm Dicke aufgenietet, welche in der Mitte einen feinen Spalt von 3 mm Länge und weniger als 0,1 mm Breite trägt. Im Kanal ist ein Pumpansatz für eine Glasdiffusionspumpe. Am Hochvakuumraum liegt die Stahldiffusionspumpe.

Die Anordnung zur Erzeugung des aufspaltenden elektrischen Feldes ist folgende: Der geerdeten Kathode steht im Abstand von 2 mm als Gegenelektrode eine mit weiten Pumplöchern versehene Aluminiumplatte gegenüber, deren Durchmesser um einige Millimeter kleiner ist als der des umgebenden Glasrohres von $3\frac{1}{2}$ cm lichter Weite. Die als Träger dienende Zuführungsstange für die Spannung hat in einem am Ende des Rohres eingekitteten Messingklotz Führung. Der abklingende Strahl wird, um ein von den nachdrängenden Gasresten ungestörtes Leuchten zu beobachten, erst in einigen Millimetern Abstand nach dem Austritt aus dem Kathodenspalt untersucht. Der Feldkondensator ist verschiebbar; die obere geerdete Platte ist für den Eintritt der Strahlen mit einem engen Schlitz versehen und durch drei Quarzstäbchen auf 2 mm Entfernung von der Gegenplatte fixiert.

Im dritten Teile der Arbeit werden diese beiden Anordnungen in einer einzigen vereinigt: Der Strahl tritt zunächst in ein Feld mit Stickstoffdruck von einigen Hundertstel Millimeter Hg und dann später in ein gleich starkes Feld mit Hochvakuum. Die Beobachtung der beiden Felder erfolgt gleichzeitig und zwar senkrecht zu Strahl- und Feldrichtung. Die Anordnung besteht aus zwei Teilen: Der oben beschriebenen langen Kathode und einem gesonderten Spaltträger (vgl. Fig. 1 des Schnittes durch Kathode und Spaltträger). Dieser liegt an Feldspannung und ist über einen Glasring in genau 2 mm Entfernung von der Austritts Stirnfläche der Kathode angesetzt. Seitliche Ansätze am Glasring führen zur Stickstoffzuführung und zum MacLeod. Der erste Beobachtungsraum, in dem also der Strahl auf seinem Wege durch das elektrische Feld in Stickstoffgas von einigen Hundertstel Millimeter Hg-Druck verläuft, ist durch einen feinen Spalt von

0,1 mm Breite vom zweiten Raum, mit ganz geringem Gasdruck getrennt. Nach dem Austritt aus dem Spalt durchquert der Strahl zunächst ein der Beobachtung nicht zugängliches Feld, dessen Richtung derjenigen der beiden Beob-

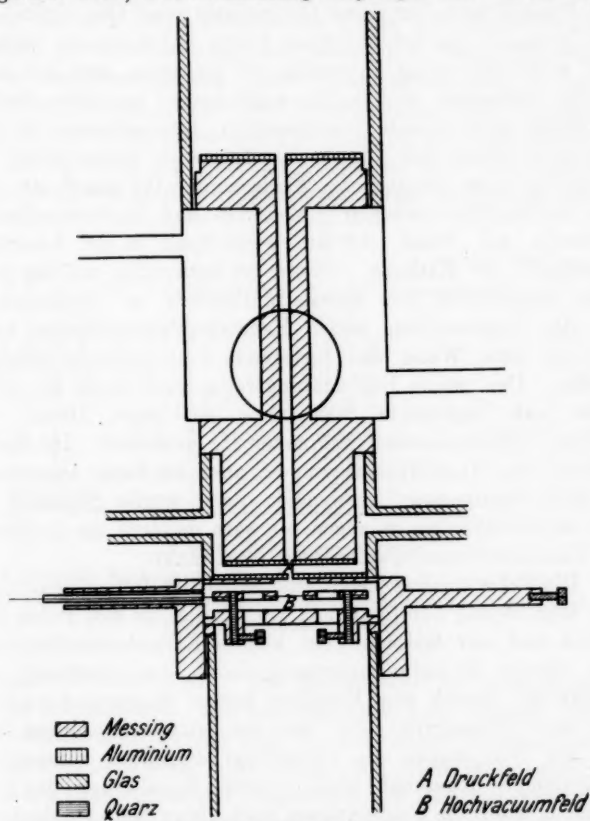


Fig. 1. Schnitt durch Kathode und Spaltträger

achtungsfelder entgegengesetzt ist. Dieses umgekehrte Feld ließe sich nur durch eine sehr komplizierte Anordnung vermeiden. Es kann aber im übrigen angenommen werden, daß wegen des dort herrschenden sehr geringen Druckes keine Anregungs- und Störungsbedingungen existieren. Nach diesem

Weg von 2 mm tritt der Strahl durch den Schlitz einer geerdeten und isolierten Platte in das zweite Beobachtungsfeld ein. Der Erdungsdraht ist durch die Wandung des Spaltträgers in einem isolierenden Quarzröhrchen geführt. Die mit Pumplöchern versehene Gegenplatte trägt Quarzstifte, um den Abstand von der geerdeten Platte auf 2 mm zu fixieren. Um möglichst wenig Intensität zu verlieren, muß auf sorgfältige Justierung der Spalte aufeinander geachtet werden. Es liegen drei Schlitze übereinander: Der unterste in der geerdeten Platte des zweiten Kondensators (dieser dient der Erzielung eines homogenen Feldes); der 0,1 mm-Spalt, der das Druckgefälle zwischen Hochdruck- und Niederdruckraum herstellt; der dritte, 0,3 mm weite Spalt in der Austrittsstirnfläche der Kathode. Dieser ist notwendig, um die seitliche Ausdehnung des Kanalstrahlbündels zu beschränken; bei den angewandten hohen Kanalstrahlstromstärken kann nur auf diese Weise das zerlegende Feld aufrecht erhalten werden. Der zweite Beobachtungsraum wird durch die möglichst nah angesetzte Stahlpumpe auf einen Druck von wenigen Zehntausendstel Millimeter Hg evakuiert. Im Kanal pumpen zwei Glasdiffusionspumpen; auch bei dieser Anordnung ist gute Gastrennung notwendig; denn würde Stickstoff in den Entladungsraum gelangen, so wäre dadurch die Ausbeute an Wasserstoffkanalstrahlteilchen beschränkt.

Die Feldspannung liefert eine 40plattige Influenzmaschine. Zur Regulierung der Spannung ist parallel zu den Polen des Feldes und der Maschine ein kleines Kathodenstrahlrohr gelegt, dessen Entladungsspannung durch den Gasdruck bestimmt ist. Durch eine Kapillare strömt Wasserstoff zu, der von einer Glaspumpe oder bei der letzten Anordnung von der den Glaspumpen als Vorvakuum dienenden rotierenden Gaedepumpe abgesaugt wird. Durch Regulierung der Zuströmung kann die Feldspannung nach dieser Methode dauernd auf wenige Prozent genau gehalten werden. So beträgt die durchschnittliche Schwankung bei 15000 Volt kaum 100 Volt, was einer nur unmerklichen Linienverbreiterung entspricht. Die Feldspannung wird kontrolliert an einem Braunschen Elektrometer, dessen Meßbereich bei Spannungen über 12000 Volt durch einen vorgelegten Luftkondensator erweitert ist.

Als Spannungsquelle für die Kanalstrahlenröhre wird die Niederspannungs-Stabili-Voltanlage der Siemens- und Halske A.-G. benützt. Durch die Anwendung der Voltanlage sind die Belichtungszeiten auf einen Bruchteil der Zeiten verkürzt, die sich beim Betrieb der Röhre mit einem Funkeninduktor als notwendig ergeben haben. Die Stabili-Voltanlage, welche die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte, verdankt das Physikalische Institut der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft. Die Spannung ist bei allen Aufnahmen 25 000 Volt, wie die Messung im Hochspannungskreis mit Funkenstrecke oder die Messung der Primärspannung bei bekanntem Über-

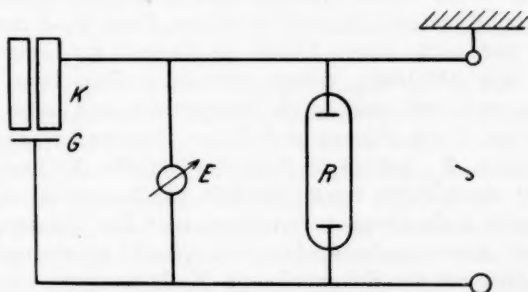


Fig. 2. Schaltungsschema

K geerdete Kathode des Kanalstrahlrohrs. *G* Gegenelektrode
R Entladungsröhr zur Regelung der Feldspannung. *E* Elektrometer. *J* Influenzmaschine

setzungsverhältnis ergibt. Die Stromstärke ist durchschnittlich 20 Milliampères. Als ein für diese hohe Energie taugliches Entladungsröhr hat sich ein umgebauter Glühkathoden-gleichrichter erwiesen. An Stelle des Glühdrahtträgers ist ein Kanalstrahlrohransatz angeblasen, so daß sich eine Gesamtlänge von 70 cm ergibt. Der Kathode steht in einer Entfernung von 40 cm inmitten einer Ausbauchung der Glaswand eine als Anode dienende Tantalblechscheibe gegenüber. Diese schirmt die Kathodenstrahlen ab. Würden sie die Wände der Röhre ungehindert treffen, so wäre das Glas in wenigen Sekunden so stark erwärmt, daß es dem Druck nicht mehr standhielte. Die Blechscheibe kann bei hohen

Stromstärken schadlos zum Glühen kommen. — Wegen der beiden großen Kondensatoren der Voltanlage von je 75000 cm, welche zum Ausgleich der pulsierenden Gleichspannung dienen, erfolgen beim Freiwerden von Verunreinigungen der Kathode und Anode sehr starke momentane Stromstöße. Sie werden vermieden, wenn die Röhre 1—2 Stunden lang durch allmählich anwachsende starke Ströme gereinigt wird. — Bei 25000 Volt ist die Röntgenstrahlemission durch die auf das Tantablech auffallenden Kathodenstrahlen immerhin so beträchtlich, daß auf sorgfältige Abdeckung der Photoplatte durch Bleischirme geachtet werden muß.

Der Strahl verläuft parallel zum Spektrographenspalt, so daß das Kanalstrahlbündel in seiner Tiefe (2—3 mm) anvisiert und nach seiner Länge im Felde (2 mm) abgebildet wird. Die Abbildung erfolgt mit einem Zeissessar. Der Spektrograph hat drei große Glasprismen und zwei Zeisstessare von 1:4,8 Öffnung und 50 cm Brennweite. Die Dispersion um H_{β} beträgt 35 Ångström auf den Millimeter, so daß mit einem Felde von 60000 Volt pro Zentimeter eine befriedigende Aufspaltung zu erreichen ist. Zur Trennung des senkrecht schwingenden Lichtes vom parallel schwingenden ist unmittelbar an der Rohrwand eine Wollastonplatte von 1 cm Kantenlänge angebracht. Bei der gleichzeitigen Aufnahme der beiden Felder, des Druckfeldes und des Hochvakuumfeldes, muß der Strahlengang des aus dem oberen Felde kommenden Lichtes parallel nach unten verschoben werden. Dies gelingt am einfachsten durch eine entsprechend geneigte Plan-
glasplatte. Wegen der kleinen Ausdehnung der Wollastonplatte ist eine Zerlegung dieses Lichtes nach seinen Schwingungsebenen nicht möglich. Verwendet werden Hauff-Ultrarapidplatten. Die Belichtungszeiten variieren von einer halben Stunde bei Druckaufnahmen bis 10 Stunden bei Abklingaufnahmen. Die Schwärzungskurven der Spektrogramme sind teils mit dem selbstregistrierenden Photometer (nach P.P.Koch) aufgenommen, teils mit dem Mikrophotometer nach Hartmann ausgemessen. Auf eine Auswertung nach Intensitäten wurde verzichtet; es wird der Schwärzungsverlauf zweier Platten aufeinander bezogen, deren Schwärzung nahezu im gleichen Bereich liegt.

3. Die Ergebnisse

Die Untersuchungen am Starkeffekt ergaben für ruhendes Wasserstoffleuchten einen mit der Feldrichtung umkehrbaren Intensitätsunterschied der langwelligen und kurzwelligen p- und s-Zerlegungskomponenten.

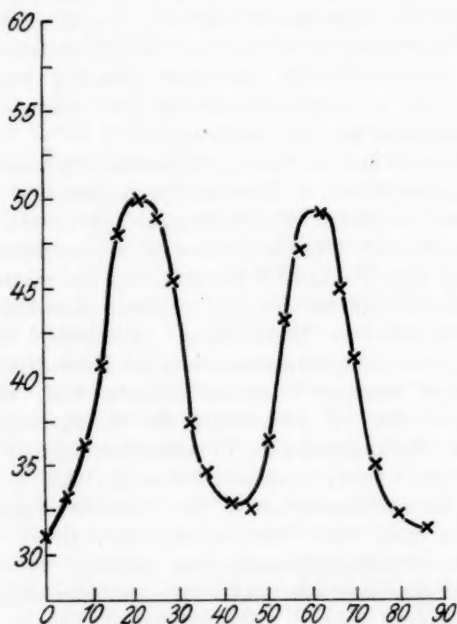
Für die von bewegten Atomen ausgesandten Spektrallinien ergab sich dasselbe Ergebnis mit umgekehrter Unsymmetrie. Es folgt hieraus, daß die Unsymmetrie von der Richtung des Feldes in bezug auf die Zusammenstöße der bewegten Atome mit den ruhenden abhängig ist, da die Stöße für die ruhenden Atome aus der entgegengesetzten Richtung kommen wie für die bewegten.

Die Figg. 3 und 4, Taf. X, zeigen die Photometerkurven der p-Komponenten von H_{β} für ruhendes und bewegtes Leuchten bei den zwei möglichen Feldrichtungen und nahezu gleichem Schwärzungsbereich. Bei den Spektralaufnahmen, deren Schwärzungsverlauf Figg. 3a und 3b darstellt, war die Schaltung derart, daß der Feldvektor von der geerdeten Kathode wegwies, was der Starkschen Bezeichnung „Gleichfeld“ entspricht. Fig. 3a zeigt die Schwärzungsverteilung der Linienkomponenten, deren Träger bewegte Wasserstoffteilchen sind; in diesem Falle ergibt sich ein Überwiegen der Schwärzung für die langwelligen Komponenten in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Stark, Lunelund und Wilsar. — Fig. 3b gibt die Schwärzungsverteilung für dieselbe Feldschaltung wieder, nun aber für Wasserstoffteilchen, deren Emission durch stoßende Stickstoffkanalstrahlen angeregt ist; hier tritt ein Überwiegen der Intensität für die kurzwellige Komponente auf.

Figg. 4a und 4b sind die Photometerkurven für die der vorigen entgegengesetzte Feldschaltung — bei Stark „Gegenfeldschaltung“. Fig. 4a weist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der obengenannten Forscher für das bewegte Leuchten eine intensivere kurzwellige Komponente auf. Fig. 4b ist die Schwärzungsverteilung für das ruhende Leuchten; hier erscheint nun die langwellige Komponente intensiver.

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse führt zu der folgenden Feststellung: Wenn wir die Richtung des elektrischen Feldes festhalten — sei es Gleichfeld oder Gegen-

feld — und bei der Intensitätsvergleichung der Komponenten vom bewegten zum ruhenden Leuchten übergehen, dann kehrt sich die Dissymmetrie um. Fassen wir die Bewegung der anregenden Stickstoffteilchen gegen die ruhenden Wasserstoffteilchen als Relativbewegung der Wasserstoffteilchen gegen die Stickstoffteilchen auf, dann zeigen die Beobachtungen,



× Schwärzung für Starkeffekt im Hochvakuum.
Röhrenspannung 25 000 V. Feld 60 000 V/cm

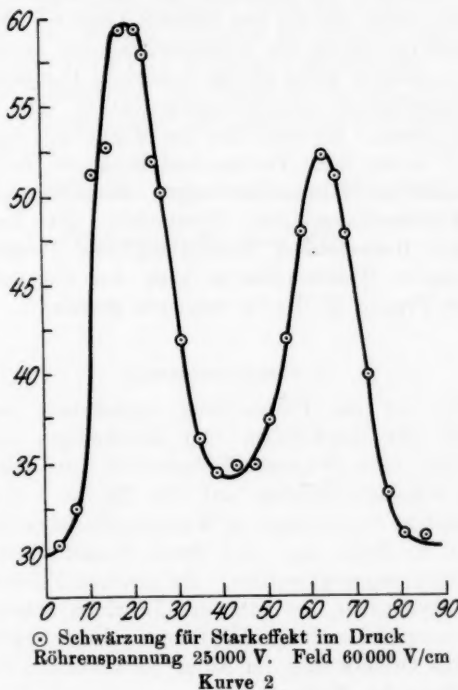
Kurve 1

daß die Dissymmetrie dieselbe ist, sowohl wenn ruhende, wie wenn bewegte Wasserstoffteilchen beobachtet werden.

Die Linienkomponenten des Starkeffekts am abklingenden bewegten Leuchten zeigen bei beiden Feldschaltungen keine merkbare Dissymmetrie.

Die Kurve 1 gibt das Ergebnis einer fünffachen Meßreihe am Hartmannschen Mikrophotometer für eine Spektral-

aufnahme des abklingenden Strahles an. Kurve 2 zeigt den Schwärzungsverlauf einer Aufnahme des Strahles in Stickstoffdruck bei gleicher Röhren- und Feldspannung wie bei Kurve 1. Der Schwärzungsbereich entspricht dem der Kurve 1. Die Streuung der Meßwerte beträgt maximal 0,5 Ordinatenteile, so daß es also möglich gewesen wäre, noch den 14. Teil der



in Kurve 2 angegebenen Schwärzungsdifferenz festzustellen. — Die gleichzeitig auf eine Platte gebrachten Spektralaufnahmen des Strahles auf seinem Verlauf im ersten Felde mit Stickstoffdruck und im zweiten Felde vor Beendigung der Abklingung im Hochvakuum zeigen merkbare Intensitätsdissymmetrie für das Leuchten im Stickstoffdruck und symmetrische Intensitäten nach einem Weg von wenigen Millimetern im Hochvakuum.

Das Fehlen der Dissymmetrie im Abklingleuchten und ihre Abhängigkeit von der Stoßrichtung läßt vermuten, daß die Quelle der Dissymmetrie in Einwirkungen fremder Atome auf den Leuchtprozeß zu suchen ist. Auffallend und schwer erklärbar ist das Aufhören der Dissymmetrie, sobald die Strahlen in ein hohes Vakuum gelangen.

Die Theorie¹⁾ im Anschluß an das Bohrsche Atommodell gibt, wenn wir für das ruhende Leuchten die oben erklärte Relativbewegung der Wasserstoffteilchen annehmen, für alle vier möglichen Fälle richtig orientierte Dissymmetrien. — Beim Längseffekt ist die Bewegungsrichtung stets senkrecht zur Feldrichtung. Es fehlt also die Möglichkeit einer Orientierung im Atom nach Vorder- und Rückseite in bezug auf die Feldrichtung. Demgemäß zeigen die Komponenten des Längseffektaufspaltungsbildes Symmetrie der Intensitäten. Wegen der theoretischen Behandlung des Problems nach Schrödingers Wellenmechanik kann auf die nachfolgende Arbeit von Francis G. Slack verwiesen werden.

4. Zusammenfassung

1. Der mit der Feldrichtung umkehrbare Intensitätsunterschied der langwelligen und kurzwelligen Zerlegungskomponenten beim Wasserstoff-Stärkeffekt tritt nicht nur an bewegten Wasserstoffteilchen auf (für die ihn J. Stark feststellte), sondern er wird auch an Wasserstoffteilchen beobachtet, die selbst in Ruhe sind und durch Stickstoffkanalstrahlen zum Leuchten angeregt werden. Bei gleichen Feldschaltungen ist die Dissymmetrie am ruhenden Leuchten entgegengesetzt der am bewegten Leuchten. Die Deutung dieser Erscheinungen fordert eine Orientierung im Atom nach Vorder- und Rückseite im Sinne des Feldvektors.

2. Der abklingende Wasserstoffstrahl zeigt ein intensitätssymmetrisches Aufspaltungsbild im elektrischen Feld. Auch wenn der Strahl beim Durchqueren eines Feldes in Stickstoffgas ein dissymmetrisches Zerlegungsbild gegeben hat,

1) Sommerfeld, Jahrbuch für Rad. und Elektr. 17. S. 426. 1921; Rubinowicz, Zeitschr. f. Phys. 5. S. 331. 1921.

liefert er beim weiteren Verlauf im Hochvakuum gleich intensive Komponenten der Aufspaltung.

Für die Anregung zu der vorgelegten Arbeit und für stetiges förderndes Interesse an ihrem Fortgang spreche ich Hrn. Geheimen Rat Professor Dr. Wilhelm Wien meinen tiefen Dank aus.

Während der Untersuchungen hatte ich mich der dauernden Beratung der Herren Professor Dr. Eduard Rüchardt und Privatdozent Dr. Fritz Kirchner zu erfreuen.

Für die Überlassung der Stabili-Voltanlage ist das Institut der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft zu Dank verpflichtet.

München, Physikal. Inst. der Universität, Oktober 1926.

(Eingegangen 20. Januar 1927)

**6. Die Intensitätsdissymmetrie beim Wasserstoff-Stärkeffekt;
von Francis G. Slack¹⁾**

(Eine Erklärung auf Grund von Schrödingers
Wellenmechanik)

Untersuchungen von Stark²⁾, Wilsar³⁾ und Lunelund⁴⁾ haben gezeigt, daß unter gewissen Bedingungen ein Intensitätsunterschied zwischen den lang- und kurzwelligen Komponenten der Wasserstoff-Balmerlinien im elektrischen Feld existiert. Genauer gesagt: wenn die Feldrichtung mit der Bewegungsrichtung der Wasserstoffatome zusammenfällt, so ist die langwellige Komponente stärker und bei umgekehrter Feldrichtung wird die kurzwellige Komponente intensiver. Bohr⁵⁾ bemerkte nun und Sommerfeld⁶⁾ führte rechnerisch aus, daß im ersten Fall die Elektronenbahnen, die zur langwelligen Komponente Anlaß geben, mehr hinter dem Kern verlaufen (vor und hinter dem Kern im Sinne des elektrischen Feldes gerechnet), während sie im zweiten Fall mehr vor dem Kern liegen. Wenn die strahlenden Atome durch das verdünnte Gas in der Röhre hindurchwandern, so werden die Bahnen, die hinter dem Kern liegen, mehr vor der Einwirkung der Gaspertikeln geschützt, so daß ihre Zahl größer ist als die der Bahnen an der Front des Atoms. So resultiert im ganzen mehr Strahlung für die Komponenten, welche zu Übergängen zwischen geschützten Bahnen gehören, also im ersten Fall für die längere und im zweiten für die kürzere.

Eine neue sehr schöne Experimentaluntersuchung von Wierl⁷⁾ hat gezeigt, daß für Kanalstrahlen, die in ein sehr

1) William Bayard Cutting Fellow of Columbia University.

2) J. Stark, Berliner Berichte 20. 1913.

3) H. Wilsar, Göttinger Nachrichten 1914.

4) H. Lunelund, Ann. d. Phys. 45. S. 517. 1914.

5) N. Bohr, Phil. Mag. 30. S. 405. 1915.

6) A. Sommerfeld, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 17. S. 426. 1920.

7) R. Wierl, Ann. d. Phys. 82. S. 563. 1927.

hohes Vakuum eintreten, wo sie keine fremden Gasteilchen antreffen, die erwähnte Dissymmetrie nicht existiert (die Feldrichtung verläuft parallel zur Strahlrichtung), daß zweitens die leuchtenden Wasserstoffatome, wenn sie in eine Atmosphäre von Stickstoff kommen, eine Dissymmetrie zeigen — in Übereinstimmung mit der obigen Überlegung — und daß drittens ruhende leuchtende Wasserstoffatome, die durch einen Strom von Stickstoffkanalstrahlen angeregt werden, die Dissymmetrie ebenfalls aufweisen und zwar ist in diesem Fall die langwellige Komponente intensiver, wenn die Richtung der bewegten Stickstoffteilchen der Feldrichtung entgegengesetzt verläuft. Diese Ergebnisse stehen ebenfalls in vollkommener Übereinstimmung mit der Erklärung nach der Bohrschen Theorie, denn wir haben jetzt nicht die Bewegung, sondern die Stoßrichtung gegen die strahlenden Wasserstoffatome zu betrachten und man sieht leicht, daß die Bahnen, die zur stärkeren Komponente Anlaß geben, immer auf der geschützten Seite des Kerns liegen.

In dieser Arbeit wollen wir zeigen, daß die Erscheinungen durch Schrödingers Wellenmechanik ähnlich erklärt werden können. In diesem Falle haben wir zu zeigen, daß für die intensivere Komponente der größere Teil der Totalladung des Atoms (außerhalb des Kerns) immer so liegt, daß er vom Kern gegen die Störung durch stoßende Gasteilchen geschützt ist. Schrödingers¹⁾ Wellengleichung für den Stärkeffekt des Wasserstoffatoms lautet

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} - e F z \right) \psi = 0.$$

Wenn man hier parabolische Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \varphi$ einführt, wo

$$x = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

(das Feld hat die Richtung der positiven Z, also die Richtung der Achse der λ_2 -Parabeln), so erhält man als nicht normierte Eigenfunktionen:

$$(1) \psi_{m, k_1, k_2} = \lambda_1^{\frac{m}{2}} \lambda_2^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2n a_0}} L_{m+k_1}^m \left(\frac{\lambda_1}{n a_0} \right) L_{m+k_2}^m \left(\frac{\lambda_2}{n a_0} \right) e^{\pm i m \varphi}$$

wo

$$(2) \quad n = k_1 + k_2 + m + 1$$

1) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 80. S. 437. 1926.

die Hauptquantenzahl, k_1 und k_2 parabolische Quantenzahlen und $(m+1)$ die äquatoriale Quantenzahl sind. L_{m+k}^m bedeutet die m -te Ableitung des $(m+k)$ -ten Laguerreschen Polynoms.

$$(3) \quad a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}$$

den Radius der ersten Wasserstoffbahn. Das elektrische Feld wird als klein angesehen. Die Ladungsdichte soll nach Schrödinger in folgender Weise als Funktion der oben genannten Quantenzahlen und Koordinaten gegeben sein. $\rho = \psi \bar{\psi}$, wo $\bar{\psi}$ der konjugierte Wert von ψ ist.¹⁾

D. h.

$$(4) \quad \rho = \lambda_1^m \lambda_2^m e^{-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{n a_0}} \left[L_{m+k_1}^m \left(\frac{\lambda_1}{n a_0} \right) \right]^2 \cdot \left[L_{m+k_2}^m \left(\frac{\lambda_2}{n a_0} \right) \right]^2.$$

Aus diesem Ausdruck kann die Ladungsdichte für jeden Atomzustand der durch die Quantenzahlen k_1 , k_2 und $(m+1)$ charakterisiert ist, in jedem Punkt λ_1 , λ_2 , φ bestimmt werden. Zur Normierung führen wir in (1) einen Faktor C ein, so daß

$$5) \quad \iiint C \rho \, dv = 1, \quad \text{wo } dv = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 d\varphi.$$

Wir bekommen so folgende Gleichung, die schon von Schrödinger²⁾ und in etwas verschiedener Form von Waller³⁾ angegeben wurde:

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} 1 = & \frac{C}{4} \int_0^\infty \lambda_1^{m+1} e^{-\frac{\lambda_1}{n a_0}} \left[L_{m+k_1}^m \left(\frac{\lambda_1}{n a_0} \right) \right]^2 d\lambda_1 \cdot \\ & \int_0^\infty \lambda_2^m e^{-\frac{\lambda_2}{n a_0}} \left[L_{m+k_2}^m \left(\frac{\lambda_2}{n a_0} \right) \right]^2 d\lambda_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ & + \frac{C}{4} \int_0^\infty \lambda_1^m e^{-\frac{\lambda_1}{n a_0}} \left[L_{m+k_1}^m \left(\frac{\lambda_1}{n a_0} \right) \right]^2 d\lambda_1 \cdot \\ & \int_0^\infty \lambda_2^{m+1} e^{-\frac{\lambda_2}{n a_0}} \left[L_{m+k_2}^m \left(\frac{\lambda_2}{n a_0} \right) \right]^2 d\lambda_2 \int_0^{2\pi} d\varphi, \end{aligned} \right.$$

1) Wir wollen es durchaus offen lassen, ob man ρ als Ladungsdichte „des Elektrons“ oder als Aufenthaltswahrscheinlichkeit desselben auffassen soll. Für die folgenden Überlegungen ist es ganz gleichgültig, welche von den zwei Auslegungen wir annehmen wollen.

2) E. Schrödinger, a. a. O.

3) Ivar Waller, Zeitschr. f. Phys. 80. S. 635. 1926.

also:

$$(6) \quad C = \frac{k_1! k_2!}{\pi (n a_0)^{2m+3} [(m+k_1)!]^3 [(m+k_2)!]^3 (m+k_1+k_2+1)}$$

Wir multiplizieren den so normierten Ausdruck für ϱ mit der Gesamtladung, und erhalten die Dichte. Wenn wir diesen Ausdruck für die Ladungsdichte mit der z -Koordinate multiplizieren und über den ganzen Raum integrieren, bekommen wir den Mittelwert der z -Koordinate der Gesamtladung. Wir nennen ihn \bar{z} und haben (C behalten wir der Einfachheit halber bei)

$$(7) \quad \bar{z} = \iiint C \varrho z dv = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty C \varrho \cdot \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 d\varphi.$$

Es ergibt sich ähnlich wie oben:

$$(7') \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{z} &= \frac{C}{8} \int_0^\infty \lambda_1^{m+2} e^{-\frac{\lambda_1}{n a_0}} \left[L_{m+k_1}^m \left(\frac{\lambda_1}{n a_0} \right) \right]^3 d\lambda_1 \cdot \\ &\quad \int_0^\infty \lambda_2^m e^{-\frac{\lambda_2}{n a_0}} \left[L_{m+k_2}^m \left(\frac{\lambda_2}{n a_0} \right) \right]^3 d\lambda_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &\quad - \frac{C}{8} \int_0^\infty \lambda_1^m e^{-\frac{\lambda_1}{n a_0}} \left[L_{m+k_1}^m \left(\frac{\lambda_1}{n a_0} \right) \right]^3 d\lambda_1 \cdot \\ &\quad \int_0^\infty \lambda_2^{m+2} e^{-\frac{\lambda_2}{n a_0}} \left[L_{m+k_2}^m \left(\frac{\lambda_2}{n a_0} \right) \right]^3 d\lambda_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{3\pi C (n a_0)^{2m+4} [(m+k_1)!]^3 [(m+k_2)!]^3}{2 k_1! k_2! (k_1^2 + m k_1 + k_1 - k_2^2 - m k_2 - k_2)} \end{aligned} \right.$$

Das gibt als Endresultat, wenn wir für C seinen Wert einsetzen:

$$(8) \quad \bar{z} = \frac{3}{2} (n a_0) (k_1 - k_2).$$

Daraus ist es offensichtlich klar, daß für Fälle, wo die Anfangsbahn ein $k_1 > k_2$ besitzt, die mittlere z -Koordinate der Ladung (\bar{z}) positiv wird und daß der größere Teil der Ladung auf der Frontseite des Atoms liegt. Wenn $k_1 = k_2$, wird die Ladungsverteilung symmetrisch. Für $k_1 < k_2$, also für einen Ausgangszustand, der zur langwelligen Komponente Anlaß gibt, liegt die Ladung zum größten Teil hinter dem Kern. Dieses

Ergebnis stimmt mit den experimentellen Tatsachen und auch mit der vorigen Erklärung durch die Bohrsche Theorie sehr gut überein.

In der Bohrschen Theorie wird die Energie beim Stark-effekt 1. Ordnung durch das Produkt der z -Koordinate des Elektrons in Fe gegeben. Ähnlich haben wir hier, wenn wir an Stelle von z die mittlere Koordinate \bar{z} benützen:

$$(9) \quad E = e F \bar{z} = \frac{3}{2} e F (n a_0) (k_1 - k_2)$$

und deshalb aus (3), wo $a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}$ ist

$$(9') \quad E = \frac{3}{8} \frac{F h^2 n}{\pi^2 m e} (k_1 - k_2).$$

(Wenn man diese Gleichung zugrunde legt, so kann man die Erklärung der Unsymmetrie direkt aus ihr ablesen.)

Um die Ladungsverteilung anschaulich zu machen, zeigen wir in Fig. 1 und 2 die Ladungsverteilung für den Anfangs- und Endzustand einer der intensiveren Parallelkomponenten von H_β (kurzwellige Komponente) nämlich für den Übergang 202 \rightarrow 002. Wir wählen diese Linie, weil sie von Wierl¹⁾ beobachtet worden ist. Die relativen Ladungsdichten zahlreicher Punkte wurden aus (4) berechnet; dabei haben die Quantenzahlen die Werte $k_1 = 2$, $k_2 = 0$, $m = 1$, $n = 4$ und $k_1 = k_2 = 0$, $m = 1$, $n = 2$.

Dies gibt die Beziehungen:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_{202} = C \lambda_1 \lambda_2 e^{-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{4 a_0}} & \left[9 \left(\frac{\lambda_1}{4 a_0} \right)^4 - 108 \left(\frac{\lambda_1}{4 a_0} \right)^3 + 432 \left(\frac{\lambda_1}{4 a_0} \right)^2 \right. \\ & \left. - 648 \left(\frac{\lambda_1}{4 a_0} \right) + 324 \right]. \end{aligned} \right.$$

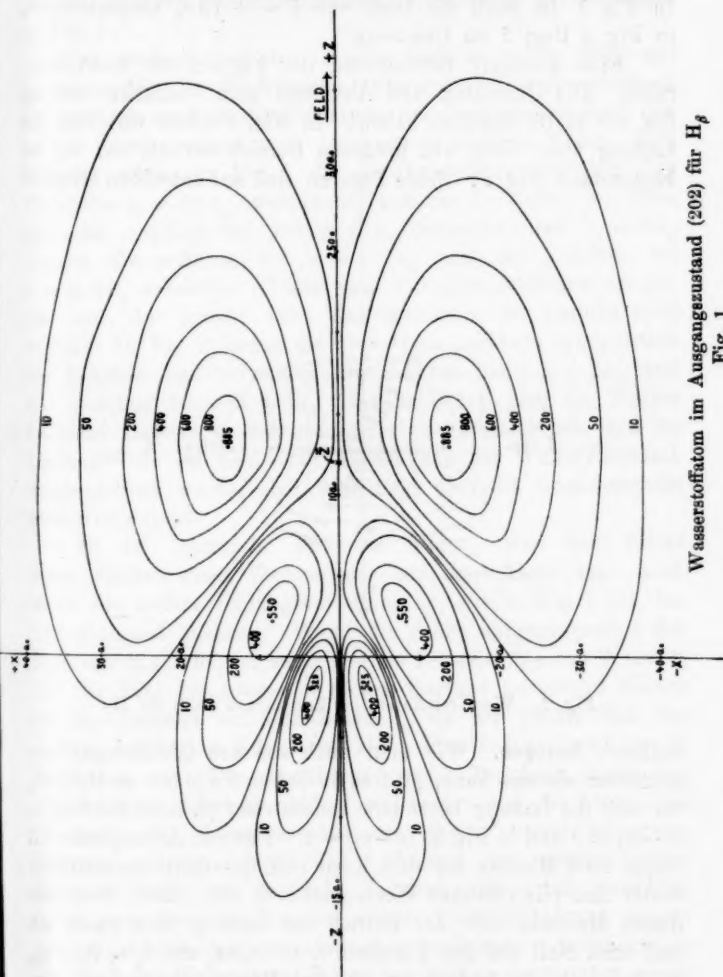
$$(11) \quad \rho_{002} = C' \lambda_1 \lambda_2 e^{-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2 a_0}}.$$

Wir setzen $C = 1$ und müssen deshalb $C' = 6910$ annehmen, um vergleichbare Werte von ρ zu erhalten.

In der Zeichnung ist jede Dichte mit πx multipliziert, so daß wir also die Hälfte der totalen Ladung in einem Elementarring um die z -Achse aufgetragen haben. Diese Zahlen sind auf jeder Seite der z -Achse in der xz -Ebene eingezeichnet und stellen zusammen die Gesamtladung in dem

1) R. Wierl, a. a. O.

Elementarring um z dar. Da φ in dem Ausdruck für ρ nicht vorkommt, ist die Ladungsverteilung symmetrisch zur z -Achse.



Wasserstoffatom im Ausgangszustand (202) für H_β
Fig. 1

Der Kern liegt im Ursprung. Die Linien in der Zeichnung verbinden Punkte gleicher Ladung und schließen solche zu-

nehmender Ladung ein. Die Relativbeträge der Ladung auf jeder dieser „Höhenlinien“ sind durch Zahlwerte angegeben. In Fig. 1 ist noch die Lage von $\bar{z} = +12a_0$ eingezeichnet, in Fig. 2 liegt \bar{z} im Ursprung.

Eine genauere Betrachtung der Figuren ist recht lehrreich. (Die Ordinaten und Abszissen sind Vielfache von a_0 , das wir in (3) definiert haben.) In Fig. 1 sehen wir, daß die Ladung über einen viel größeren Bereich verteilt ist, als im Endzustand (Fig. 2). Beide Figuren sind auf denselben Größen-

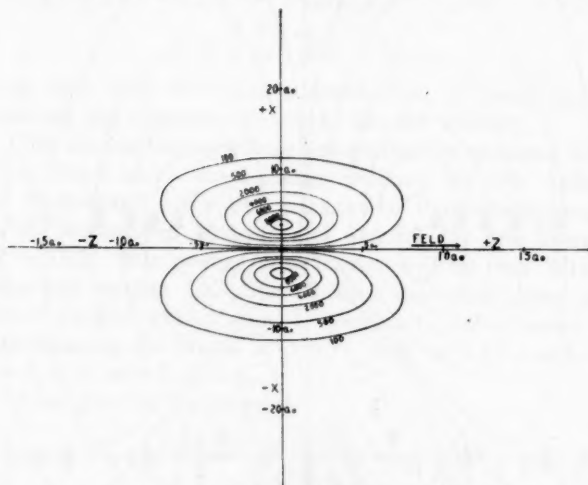


Fig. 2. Wasserstoffatom im Endzustand (002) für H_β

maßstab bezogen. Wie man auch aus den Gleichungen unmittelbar ablesen kann, gibt es in jedem Falle $(n-m)$ -Gebiete, wo sich die Ladung besonders konzentriert (d. h. in der Fig. 1. $(n-m) = 3$ und in Fig. 2. $(n-m) = 1$). Für den Anfangszustand liegen zwei Maxima vor dem Kern und das dritte unmittelbar hinter ihm (die relativen Werte sind 885, 550, 525). Zwischen diesen Maximis fällt der Betrag der Ladung sehr rasch ab und wird Null auf den Parabeln $\lambda_1 = 18,8a_0$ und $\lambda_1 = 5,06a_0$, so daß sich die Ladung in einzelne Ringgebiete trennt. Im Endzustand enthält das Ringgebiet maximaler Ladung, das sich hier dicht um den Kern zieht, ungefähr zehnmal soviel

Ladung wie das Maximum des Anfangszustandes. Wir wollen noch darauf aufmerksam machen, daß die Linien in Fig. 2 zehnmal größere „Höhenunterschiede“ darstellen als diejenigen in Fig. 1.

Der größere Teil der Ladung liegt in jedem Falle auf derselben Seite wie die früheren Bohrschen¹⁾ Elektronenbahnen und deshalb verläuft die Erklärung der Unsymmetrie nach den beiden Anschauungen auch durchaus in gleicher Weise. Zum Beispiel würde in Fig. 1 die Elektronenbahn zwischen den Parabeln $\lambda_1 = 46a_0$, welche die z -Achse in Punkt $z = 23a_0$ und die x -Achse bei $x = \pm 46a_0$ schneidet und $\lambda_2 = 8a_0$, welche die z -Achse bei $z = -4a_0$ und die x -Achse bei $x = \pm 8a_0$ schneidet. Diese zwei Parabeln schließen ein Gebiet ein, das gerade noch das Maximum der Ladung (885) enthält. In Fig. 2 liegen die zwei Grenzparabeln symmetrisch zur x -Achse und schneiden die z -Achse bei $z = \pm 2a_0$ und die x -Achse bei $x = \pm 4a_0$. Sie schließen also die Punkte höchster Ladung in sich ein. Aber es ist ersichtlich, daß die Ladung, wie sie hier nach Anschauung der Wellenmechanik eingezeichnet wurde, sich bedeutend über die Grenzparabeln hinaus erstreckt.

Es ist lehrreich, sich zu fragen, was der Effekt eines Stoßes eines Gasteilchens auf ein Atom sein muß, wenn die äußere Ladungsverteilung so, wie in Fig. 1 für den (202)-Zustand aussieht. Wenn die Stöße entgegengesetzt der Feldrichtung erfolgen, so zeigen die Experimente von Wierl²⁾, daß die Zahl der Atome in diesem Zustand bedeutend kleiner ist als diejenige im (022)-Zustand, wo der größte Teil der Ladung hinter dem Kern liegt. Dr. L. Pauling schlägt folgende Erklärung vor: Die Annäherung eines Teilchens gegen ein solches Atom führt zu Stößen zweiter Art und das Atom wird so durch den Zusammenstoß auf einen Zustand geringerer Energie gebracht durch die Aufnahme der entsprechenden Energie durch das stoßende Teilchen, ohne daß Strahlung dabei vom Atom ausgesendet würde. Diese Erklärung stimmt gut zu den Beobachtungstatsachen und kann möglicherweise ein Maß der Wahrscheinlichkeit von Stößen zweiter Art geben.

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 4. Aufl. S. 363.

2) R. Wierl, a. a. O.

Wie man aus der allgemeinen Gleichung (8) sehen kann, ist die Erklärung für den Fall der senkrechten Komponenten ebensogut möglich. Wenn die Feldrichtung einen rechten Winkel mit der Bewegungsrichtung bildet, so kann eine Unsymmetrie weder theoretisch erwartet werden, noch ist sie auch experimentell festgestellt worden, da die Ladungsverteilung für die langwelligen und kurzwelligen Komponenten symmetrisch zur Stoßrichtung ausfällt.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Geheimrat Sommerfeld meinen Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein gütiges Interesse an derselben sagen. Desgleichen bin ich Hrn. Dr. Bechert für manchen Rat zu Dank verpflichtet.

München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 24. Dezember 1926)



Bild 1

Cu-Pd. 19,0 At.-Proz. Pd. Cu-Strahlung. Kubisch-flächenzentriert mit Überstruktur



Bild 2a



Bild 2b. Präzisionsaufnahme.

Cu-Pt. 50 At.-Proz. Fe Strahlung. Trigonaies Gitter mit Überstruktur



Bild 3

Cu-Pt. 60,9 At.-Proz. Pt. Fe-Strahlung. Kubisch-flächenzentriert mit Überstruktur



Bild 4

Cu-Pt. 16,7 At.-Proz. Pt. Fe-Strahlung. Kubisch-flächenzentriert mit Überstruktur



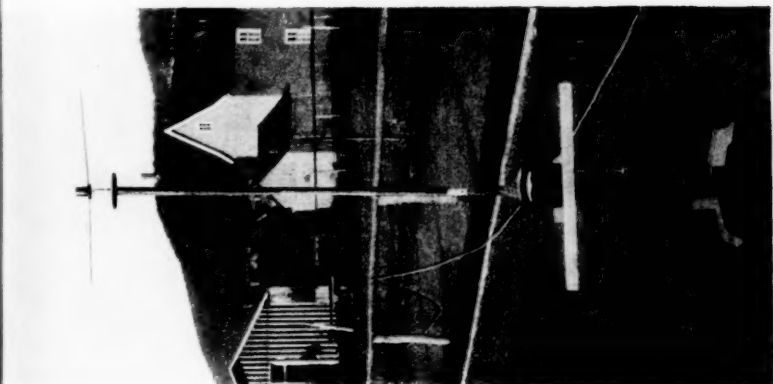


Fig. 5

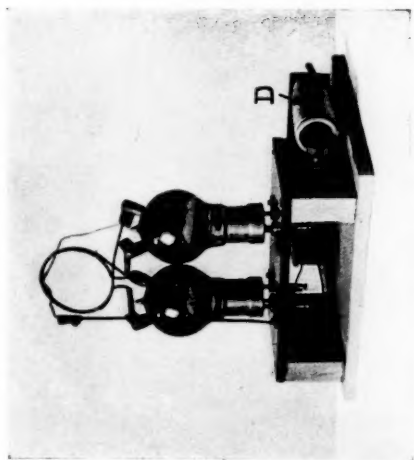


Fig. 3

L. Bergmann



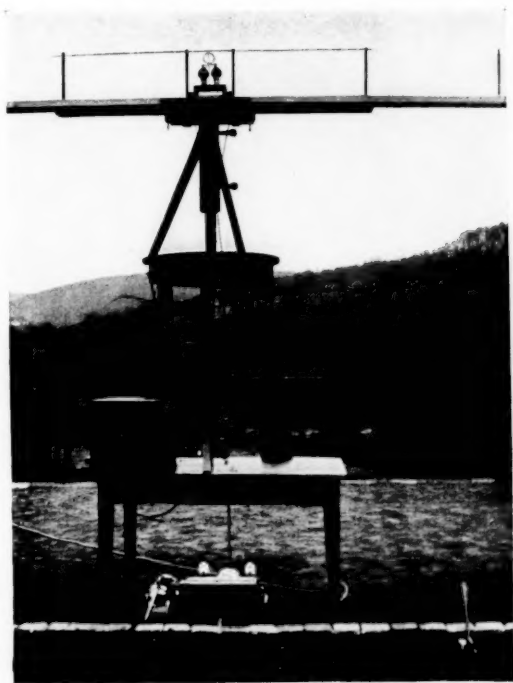


Fig. 10

L. Bergmann

THE UNIVERSITY OF CHICAGO



1914 1712

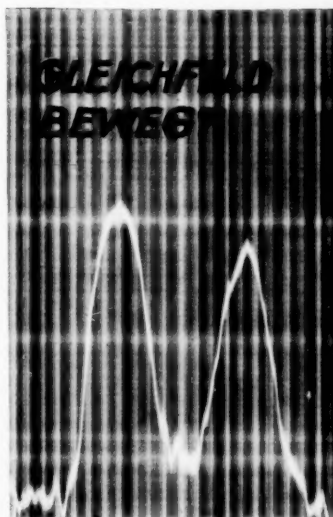


Fig. 3a

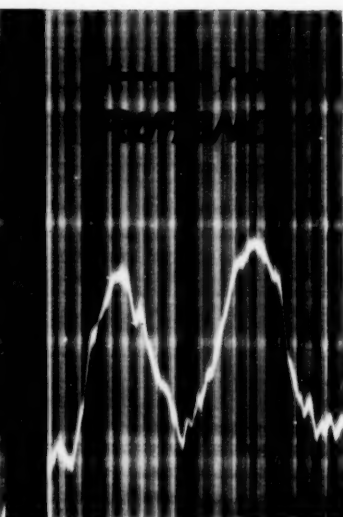


Fig. 3b

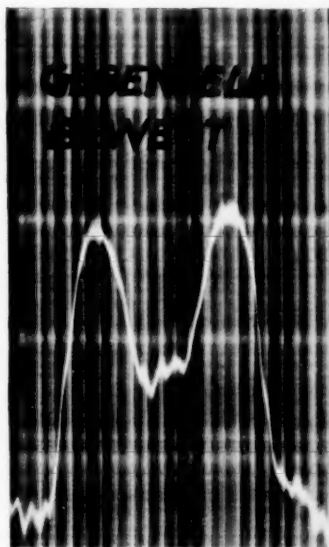


Fig. 4a

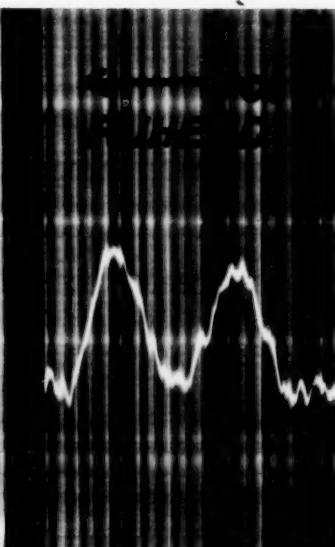


Fig. 4b